

Dissertação de Mestrado

Universidade Federal do Paraná

Departamento de Física

Efeitos da Capacidade de Detecção e da Densidade de Alvos no Problema de Busca Aleatória

Silvia Alejandra Sotelo López

Curitiba, Paraná

Fevereiro de 2011

Dissertação de Mestrado

Universidade Federal do Paraná

Departamento de Física

Efeitos da Capacidade de Detecção e da Densidade de Alvos no Problema de Busca Aleatória

Silvia Alejandra Sotelo López

Dissertação apresentada ao Curso de Pós-Graduação em
Física da Universidade Federal do Paraná como requisito
parcial na obtenção do grau de Mestre em Física.

Orientador: Prof. Dr. Marcos Gomes Eleutério da Luz.

Curitiba, Paraná
Fevereiro de 2011

L864 López, Silvia Alejandra Sotelo
 Efeitos da capacidade de detecção e da densidade de alvos no
 problema de busca aleatória / Silvia Alejandra Sotelo López. – Curitiba,
 2011.
 72f. : il.

 Impresso.
 Dissertação (mestrado) – Universidade Federal do Paraná, Setor de
 Ciências Exatas, Programa de Pós-Graduação em Física.
 Orientador: Marcos Gomes Eleutério da Luz.

 1. Métodos estatísticos. 2. Processo estocástico. 3. Escala finita
 (Física estatística). 4. Sistemas biológicos. I. Luz, Marcos Gomes
 Eleutério da. II. Título.

CDD: 519.2

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ
SETOR DE CIÊNCIAS EXATAS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

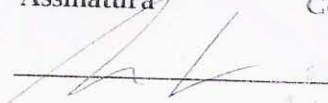

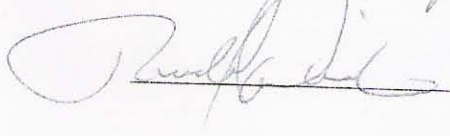


DEFESA DE DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

TÍTULO: EFEITOS DA CAPACIDADE DE DETECÇÃO E DA
DENSIDADE DE ALVOS NO PROBLEMA DE BUSCA ALEATÓRIA

SILVIA ALEJANDRA SOTELO LÓPEZ

Em sessão pública iniciada às quatorze horas desta data, após um Seminário sob o título acima, e posterior arguição esta banca examinadora decidiu atribuir ao candidato o conceito global A.

Banca Examinadora	Assinatura	Conceito
Prof. MARCOS GOMES ELEUTÉRIO DA LUZ (Orientador/Presidente) (UFPR)		<u>A</u>
Prof. MARCIO HENRIQUE FRANCO BETTEGA (UFPR)		<u>A</u>
Prof. RONALD DICKMAN (UFMG)		<u>A</u>

Curitiba, 28 de fevereiro de 2011.

Resumo

Neste trabalho estudamos o problema geral de busca aleatória. Consideramos um buscador que se comporta como um caminhante aleatório que escolhe o tamanho de seus passos a partir de uma distribuição de Lévy $P(\ell_j) \sim \ell_j^{-\mu}$. Assumimos uma distribuição aleatória de alvos revisitáveis caracterizada por uma distância típica, ℓ_0 , e que especifica a abundância dos mesmos. Além disso, supomos que o poder de detecção de um alvo pelo buscador é dado por um raio de visão r_v . Em nossa análise, definimos uma eficiência estatística de busca, η , dada pela razão entre o número de alvos encontrados e a distância total percorrida. Nosso objetivo então é: supondo diferentes situações para o problema (especificados por ℓ_0 e r_v), determinar qual é o valor de μ que maximiza η . Através de simulações numéricas, mostramos que as estratégias ótimas são extremamente dependentes da densidade de alvos e do tamanho do raio de visão. Além disso, determinamos os mecanismos difusivos a pequenas escalas que levam à otimização da busca e como estes mecanismos conduzem a diferentes comportamentos para a taxa de voos truncados (portanto bem sucedidos em encontrar um alvo) na dinâmica de busca. Assim, dados distintos cenários, estabelecemos os regimes superdifusivos ótimos de acordo com os parâmetros do buscador e do ambiente. Finalmente - como uma tentativa de modelar a situação concreta de interação entre o buscador e o ambiente - desenvolvemos um modelo de busca aleatória caracterizado por uma capacidade de detecção variável. Para tal, propomos que a capacidade de detecção decresce com o tamanho do passo ℓ_j dado pelo buscador. Diferentes funções $r_v(\ell_j)$ são discutidas. Baseados neste modelo, calculamos as

mudanças na taxa de encontros e a dependência das estratégias ótimas conforme a variação da capacidade de detecção. Encontramos que fortes decaimentos tendem a fazer com que as estratégias ótimas sejam aquelas com μ 's maiores que 2.

Abstract

Here we study the general problem of random search. We consider the searcher as a random walker which draws its steps from a Lévy distribution $P(\ell_j) \sim \ell_j^{-\mu}$. We assume a random distribution (of characteristic size ℓ_0) of revisitable targets. Such ℓ_0 determines the density of targets. Furthermore, we suppose that the scanning power of the searcher is given by a radius of vision r_v . In our analysis, we define an statistical search efficiency, η , as the ratio between the number of targets found by the total distance traveled. Our goal is then: supposing different situations for the problem (specified by ℓ_0 and r_v), to determine which values of μ maximizes η . Through numerical simulations, we show that the optimal strategies are strongly dependent on the targets density and the values of the vision radius. We also determine the diffusion mechanisms at small scales driving the optimal searches and how they influence the ratio of steps truncation (i.e., those steps which are successfull in finding a target). In this way, given the different scenarios, we establish the optimal superdiffusive regimes according to the parameters related to the searcher detection power and to the environment target density. Finally - as an effort to model the concrete situation where there is interaction between the searcher and the environment - we develop a description for the random search in which the detection power changes. Concretely, we propose that r_v decreases with ℓ_j . For so, we discuss different functions $r_v(\ell_j)$. From the model, we calculate the changes in the encounter ratio for the distinct $r_v(\ell_j)$. We find that strong decaying for such functions makes the optimal strategies to be those with μ 's greater than 2.

Sumário

1	Introdução	1
2	Sistemas Complexos e Processos Estocásticos	4
2.1	Sistemas Complexos e Fenômenos Não Lineares	4
2.2	Processos Aleatórios e Distribuições de Lévy	8
2.2.1	Difusão Normal	8
2.2.2	Difusão Anômala	11
2.3	Teorema do Limite Central Generalizado	14
3	O Problema de Busca Aleatória	17
3.1	Busca aleatória e sua Motivação	17
3.2	Caracterização do Problema	18
3.3	Modelo dos voos de Lévy para Buscas Aleatórias	20
3.4	Contexto Biológico	23
4	Densidade de Alvos e Estratégias Ótimas de Busca	26
4.1	Heterogeneidade do Ambiente de Busca	26
4.2	Adaptabilidade da Estratégia Ótima de Busca em Ambientes Heterogêneos . . .	27
5	Capacidade de Detecção do Buscador e Estratégia Ótima de Busca	38

Sumário

5.1	O Buscador e a Informação Relativa dos Recursos	38
5.2	Capacidade de Detecção Constante	39
6	Interação do buscador com o meio ambiente	57
6.1	O caso do raio de visão dependente do tamanho do passo de busca	57
6.2	Modelo de Busca	58
6.3	Influência da Capacidade de Detecção Dependente do Tamanho do Passo Sobre a Eficiência de Busca	61
7	Conclusões e Perspectivas	66

1 Introdução

Nas últimas décadas o problema de busca aleatória tem sido amplamente considerado na descrição de certas classes de fenômenos que apresentam correlações de longo alcance[LGR+09]. Por sua vez, tais correlações, associadas a mecanismos em escalas menores, controlam a evolução temporal e espacial dos sistemas em questão. A principal característica de modelos de busca aleatória é a informação incompleta que o buscador tem sobre a localização dos alvos. Um ponto chave é então saber se existem protocolos que aumentem a chance de encontros. Desta forma, a determinação de estratégias estatísticas que maximizem uma função de eficiência (em termos dos processos difusivos associados à mesmas) tem motivado diversos estudos [VRL08, RBM+09, CPB08, CHP+04]. Em particular, é sabido que quando a informação que o buscador pode obter sobre o ambiente é restrita às suas imediações, com os alvos localizados e distribuídos uniformemente, as estratégias de Lévy otimizam a função da eficiência[VBH+99].

No contexto ecológico, este resultado é de considerável importância no entendimento do movimento animal, levando-se em conta que as interações biológicas predador-presa (processos de reação-difusão)[BCF+02, VRL08] podem ser descritos a partir do problema de busca aleatória. Mas para tal, parte-se da hipótese de que o predador em geral carece de informação sobre a exata localização das presas e que o ambiente influencia minimamente no processo. No entanto, em situações mais realísticas é correto imaginar que a estratégia ótima de busca deva ser fortemente dependente das condições de abundância (densidade de alvos) do ambiente onde o processo ocorre [RBM+09, VRL08], bem como das interações que possam existir entre

1 Introdução

o ambiente e o buscador.

Assim, motivados pelos comentários acima, o enfoque desta dissertação é estudar como variações na densidade de alvos e também na capacidade do buscador em obter informação de mais longo alcance (maior poder de detecção) sobre o ambiente (espaço de busca) influenciam e determinam as dinâmicas apropriadas para o buscador, levando-o a uma otimização da eficiência de busca.

Organizamos o presente trabalho de dissertação de mestrado da seguinte forma. No capítulo 2 fazemos uma breve introdução à idéia de Sistemas Complexos. Também discutimos, através de um exemplo, como sistemas complexos podem estar associados a comportamentos globais, emergindo de processos aleatórios em escalas de tempo e/ou espaço bem menores que os sistemas em si. Por último, apresentamos um breve panorama de como em sistemas afastados do equilíbrio surgem fenômenos anômalos de difusão, descritos por distribuições de Lévy. No capítulo 3 formulamos o problema geral de busca aleatória (caso não-destrutivo, ou seja, alvos podem ser revisitados), que é um sistema complexo. Apresentamos o modelo de busca de Lévy e as suas implicações no contexto biológico. No capítulo 4 analisamos a dinâmica do buscador em ambientes com diferentes densidades de alvos. Mostramos como se dão as mudanças nas estratégias ótimas de busca conforme varia-se a densidade de alvos. No capítulo 5 estudamos o efeito das mudanças na capacidade de detecção do buscador. Considerando um poder de detecção fixo durante toda a dinâmica, determinamos as condições para maximização da eficiência e como tal otimização muda ao se alterar o poder de detecção do buscador. No capítulo 6 consideramos interações do buscador com o ambiente a partir de um modelo de busca que assume uma capacidade de detecção dependente da dinâmica de movimento (mais especificamente, do comprimento dos passos do buscador). Mostramos que se o poder de detecção diminui para deslocamentos muito longos (numa situação real, por fadiga por exemplo), então uma estratégia de busca com difusividade muito elevada não é uma boa escolha como dinâmica de maximização.

1 Introdução

Enquanto o movimento Browniano também não otimiza a busca. Desta forma, um compromisso entre os dois casos, uma superdifusão branda, torna-se a estratégia a ser usada. Finalmente, no capítulo 7 apresentamos as conclusões desta dissertação e delineamos algumas perspectivas para trabalhos futuros.

2 Sistemas Complexos e Processos Estocásticos

2.1 Sistemas Complexos e Fenômenos Não Lineares

Na natureza frequentemente encontramos sistemas caracterizados por um número significativo de componentes que interagem segundo regras dinâmicas simples. No entanto, podem surgir estruturas emergentes de grande complexidade em escalas maiores de tempo e espaço ao considerar o sistema em sua totalidade. Neste sentido, interações não-lineares entre as componentes são determinantes no estabelecimento desses comportamentos emergentes e como consequência, as propriedades de um *sistema complexo* não podem ser entendidas através da análise de seus componentes em separado

Frequentemente sistemas complexos não são sistemas isolados. Deste modo, as interações com o ambiente podem ocasionar mudanças nas respostas dos mesmos (como um todo) ao longo do tempo, *adaptabilidade*, Fig.(2.1). Além disso, uma vez que estes sistemas se encontram em estados fora do equilíbrio (termodinâmico), a segunda lei da termodinâmica não é aplicável na forma usual¹.

Consideremos, por exemplo, um sistema em contato com um reservatório térmico que está di-

¹ O teorema de mínima produção de entropia expressa que os sistemas próximos ao equilíbrio se estabelecem no estado de "menor de dissipação". No entanto, para sistemas mais afastados do equilíbrio tem-se mostrado que o comportamento termodinâmico poderia ser completamente diferente, na verdade, até mesmo oposto do indicado pelo teorema de mínima produção de entropia[Pri77].

2 Sistemas Complexos e Processos Estocásticos

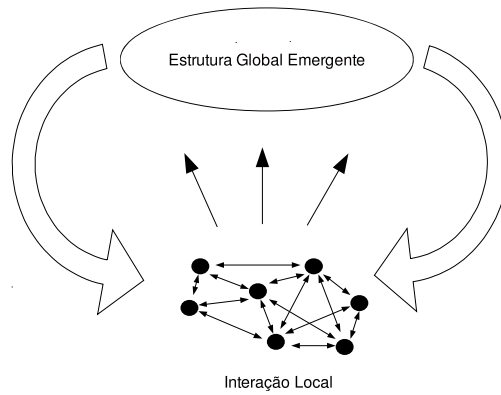


Figura 2.1: Sistemas complexos e comportamentos emergentes.

vidido em dois compartimentos (Fig.(2.2)). Suponha que inicialmente um gás em equilíbrio termodinâmico se encontra em um deles. Quando é removida a divisão, o gás passa por algumas transformações intermediárias, para finalmente atingir um novo estado de equilíbrio termodinâmico. A entropia do sistema aumenta e a configuração final é mais desordenada que a inicial ($\Delta S > 0$), já que com o aumento do volume, o número de microestados do sistema também aumenta.

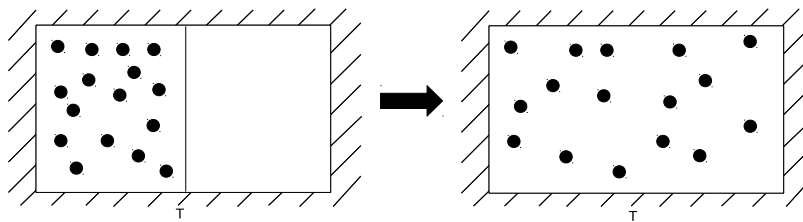


Figura 2.2: Sistema termodinâmico em equilíbrio.

Agora, suponha que o sistema não está em equilíbrio com um único reservatório e as tem-

2 Sistemas Complexos e Processos Estocásticos

peraturas das paredes inferior (T_1) e superior (T_2) são diferentes, $T_1 > T_2$ (Fig.(2.3)). Devido ao gradiente de temperatura, $\vec{\nabla}T$, se apresenta um fluxo de calor externo \vec{J} (de baixo para cima)². Ao contrário do caso anterior ($\vec{\nabla}T = 0$), o sistema reage a \vec{J} estabelecendo heterogeneidades espaciais e portanto, perto da parede superior (mais fria) a densidade do gás é maior em comparação com a densidade próxima à parede inferior.

Para determinar uma relação entre \vec{J} e $\vec{\nabla}T$ é preciso levar em conta quão afastado está o sistema do equilíbrio. Em particular, quando o sistema está perto do equilíbrio, podemos usar uma relação linear (análoga à dinâmica Newtoniana, $\vec{F} = -\vec{\nabla}U$), tal que $\vec{J} = -D\vec{\nabla}T$, onde D é a constante de difusão do calor. Esta relação expressa como o sistema se afasta do equilíbrio proporcionalmente aos fluxos externos.

Podemos considerar explicitamente a variação temporal sob tais condições ($\vec{\nabla}T \rightarrow 0$), através da equação de continuidade (local) do calor, $c_T \frac{\partial}{\partial t}T + \vec{\nabla} \cdot \vec{J} = 0$, onde c_T é a capacidade calorífica do gás. Deste modo temos que,

$$\frac{\partial}{\partial t}T = \kappa \Delta T, \quad (2.1)$$

onde $\kappa = D/c_T$ é a difusividade térmica. Esta equação linear é a equação de difusão, encontrada com frequência em diferentes áreas da física.

Situações ainda mais interessantes acontecem quando $\vec{\nabla}T \gg 0$. Para certas diferenças entre as temperaturas das paredes, apresenta-se uma instabilidade no gás que a Eq.(2.1) não consegue descrever corretamente. Esta instabilidade está associada a um mecanismo de transferência conhecido como *convecção de Bénard*, que se caracteriza pelo movimento coerente das partículas resultante das diferenças na densidade devido ao $\vec{\nabla}T$ e a efeitos gravitacionais sobre as partículas. Este estado de convecção rompe a simetria de translação no eixo horizontal, em-

² Note-se que para manter a diferença da temperatura entre as paredes é preciso obter e devolver energia do ambiente: sistemas forçados.

2 Sistemas Complexos e Processos Estocásticos

bora as forças impostas sejam espacialmente uniformes. A resposta do sistema é não uniforme justamente em decorrência das interações não lineares entre as partículas³. Assim, o aumento do transporte de calor devido ao fenômeno de convecção promove o aparecimento de estruturas organizadas e periódicas, conhecidas como *estruturas dissipativas* (Fig.(2.3)). O aparecimento de padrões globais, mesmo para interações espacialmente uniformes, é causado pelas interações locais entre os componentes, recebendo o nome de *auto-organização*.

Deste modo, vemos que em sistemas afastados do equilíbrio, as interações dos mesmos com o ambiente levam à dissipação de matéria ou energia associadas com estruturas “emergentes”. Isto mostra claramente como a dissipação torna-se “fonte” de ordem em condições de não-equilíbrio [Pri77].

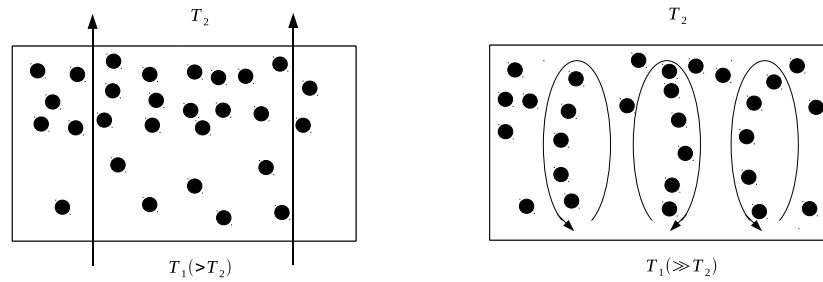


Figura 2.3: Sistema fora do equilíbrio. Na esquerda apresentamos o sistema aberto caracterizado por um fluxo de calor \vec{J} provocado pelo $\vec{\nabla}T$ entre as paredes superior (T_1) e inferior (T_2), $T_1 > T_2$. Na direita, mostramos as estruturas dissipativas que surgem com o aumento do $\vec{\nabla}T$, ($T_1 \gg T_2$), devido as interações não lineares entre as partículas. Neste contexto, as condições de contorno impedem que o sistema atinja o equilíbrio e portanto a segunda lei da termodinâmica não é aplicável na forma usual (ou seja, o sistema se estabelece no estado onde a produção de entropia é zero).

Deste rápido exemplo vemos que não-linearidade, auto-organização e adaptabilidade são características fundamentais de *Sistemas Complexos*. Isto tem permitido a abordagem de uma variedade de fenômenos, não só de interesse na física, mas também na biologia, nas ciências

³Interações lineares entre as componentes também podem gerar instabilidades, como no caso o movimento browniano.

sociais, etc., onde a complexidade das interações torna-se um desafio para o entendimento dos comportamentos e a descrição quantitativa dos fenômenos.

2.2 Processos Aleatórios e Distribuições de Lévy

Ao caracterizar a dinâmica dos *sistemas fora do equilíbrio* é possível estabelecer equações diferenciais não lineares (ou até mesmo lineares, como é o caso da Eq.(2.1)) que fornecem informação sobre o estado macroscópico médio do sistema ao longo do tempo. Embora esta descrição seja determinista, os mecanismos que governam o comportamento global do problema podem estar associados a processos aleatórios que se apresentam em escalas menores (de tempo ou espaço), associados aos constituintes (elementos) do sistema. Se estes constituintes podem ser descritos como caminhantes aleatórios, então muitas vezes é possível fazer uma conexão entre os processos “macroscópicos” médios e as interações microscópicas que levam ao comportamento emergente. A seguir passamos a discutir então processos de caminhada aleatória.

2.2.1 Difusão Normal

No exemplo discutido na seção anterior, encontramos que a dinâmica de um gás perto do equilíbrio está determinada pela equação de difusão, Eq.(2.1). Isto é obtido através de uma analogia com a mecânica Newtoniana. No entanto, esta mesma equação pode ser obtida de forma rigorosa considerando-se os fundamentos da teoria da probabilidade e as caminhadas aleatórias [RyB05].

Suponha um caminhante aleatório que inicialmente se encontra na origem (em d dimensões). A cada passo i , o caminhante avança $\Delta \vec{X}_i$, escolhido segundo a distribuição de probabilidade $p_i(\vec{r})$. Em particular, considere que os passos $\{\Delta \vec{X}_i\}$ são variáveis aleatórias independentes e

2 Sistemas Complexos e Processos Estocásticos

distribuídas identicamente *-i.i.d.*⁴, portanto, $p_i(\vec{r}) = p(\vec{r})$ e

$$p(\vec{r}_n|\vec{r}_{n+1}) = p(\vec{r}_n)p(\vec{r}_{n+1}). \quad (2.2)$$

Além disso, suponha que os passos são isotrópicos e portanto, $p(\vec{r}) = p(r)$, onde $r = |\vec{r}|$, assim, $\langle \Delta \vec{X}_i \rangle = 0$.

Definimos $P_N(\vec{R}) d^d \vec{r}$ como a probabilidade de encontrar o caminhante entre a posição \vec{R} e $\vec{R} + d^d \vec{R}$, depois de N passos, onde $P_N(\vec{R})$ é a função de densidade de probabilidade (FDP). A partir da Eq.(2.2), podemos estabelecer uma relação de recursividade entre as FDP dos passos N e $N + 1$,

$$P_{N+1}(\vec{R}) = \int p(\vec{r}) P_N(\vec{R} - \vec{r}) d^d \vec{r}. \quad (2.3)$$

Fazendo $N \rightarrow \infty$ e levando em conta que \vec{R} varia em escalas muito maiores do que \vec{r} , podemos fazer uma expansão de Taylor de $P_N(\vec{R} - \vec{r})$, tal que:

$$\begin{aligned} P_{N+1}(\vec{R}) &= \int p(\vec{r}) \left[P_N(\vec{R}) - \vec{r} \cdot \nabla P_N(\vec{R}) + \frac{1}{2} \vec{r} \cdot \nabla \nabla P_N(\vec{R}) \cdot \vec{r} + \dots \right] d^d \vec{r} \\ &= P_N(\vec{R}) + \frac{1}{2} \sum_i \sum_j \langle r_i r_j \rangle \frac{\partial^2 P_N(\vec{R})}{\partial R_i \partial R_j} + \dots \\ &= P_N(\vec{R}) + \frac{\langle \vec{r} \cdot \vec{r} \rangle}{2d} \Delta P_N(\vec{R}) + \dots \end{aligned}$$

Supondo que os passos são realizados em intervalos de tempo Δt , podemos estabelecer o tempo total t que o caminhante necessita para dar N passos, $t = N \Delta t$. Logo,

$$\frac{P_{N+1}(\vec{R}) - P_N(\vec{R})}{\Delta t} = \frac{\langle \vec{r} \cdot \vec{r} \rangle}{2d \Delta t} \Delta P_N(\vec{R}) + \dots \quad (2.4)$$

⁴ Dois eventos aleatórios, A e B, são independentes se a probabilidade conjunta $P(A \cap B) = P(A)P(B)$ ($P(B | A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$).

2 Sistemas Complexos e Processos Estocásticos

Como $N \rightarrow \infty$, a distribuição limite $\rho(\vec{R}, t)$, definida por $P_N(\vec{R}) = \rho(\vec{R}, N\Delta t)$, satisfaz a

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho = D \Delta \rho, \quad (2.5)$$

onde $D = \frac{\langle \vec{r} \cdot \vec{r} \rangle}{2d\Delta t}$. Claramente esta é a mesma equação de difusão obtida na seção anterior para um gás perto do equilíbrio termodinâmico, $\vec{\nabla} T \rightarrow 0$. É interessante ver como, baseados no movimento errático do caminhante (as partículas de um gás), é possível estabelecer regras determinísticas que governam a sua evolução temporal média.

A solução da Eq.(2.5),

$$\rho(\vec{R}, t) = \frac{\exp(-R^2/4Dt)}{(4\pi Dt)^{d/2}}, \quad (2.6)$$

nos permite obter a FDP da posição do caminhante, no limite $N \rightarrow \infty$,

$$P_N(\vec{R}) \sim \frac{\exp(-dR^2/2\langle r^2 \rangle N)}{(2\pi \langle r^2 \rangle N/d)^{d/2}}. \quad (2.7)$$

Este importante resultado mostra que a FDP da posição do caminhante depois de N passos converge para uma distribuição Gaussiana (ou normal) (Ver Sec.(2.3)).

Baseados nisto, podemos escrever a FDP do deslocamento do caminhante depois de N passos como $P_N(R) = A_d R^{d-1} P_N(\vec{R})$, onde A_d é a superfície de uma esfera em d dimensões ($A_1 = 1$, $A_2 = 2\pi$, $A_3 = 4\pi$).

Calculando o segundo momento de R , $\langle R^2 \rangle = \int R^2 P_N(R) d^d \vec{R}$, encontramos que,

$$\langle R^2 \rangle \propto t. \quad (2.8)$$

Esta relação linear entre o deslocamento quadrático médio e o tempo é uma característica marcante dos processos que evoluem segundo a difusão *normal*.

A dedução apresentada acima tem um profundo impacto no entendimento de diferentes fenô-

2 Sistemas Complexos e Processos Estocásticos

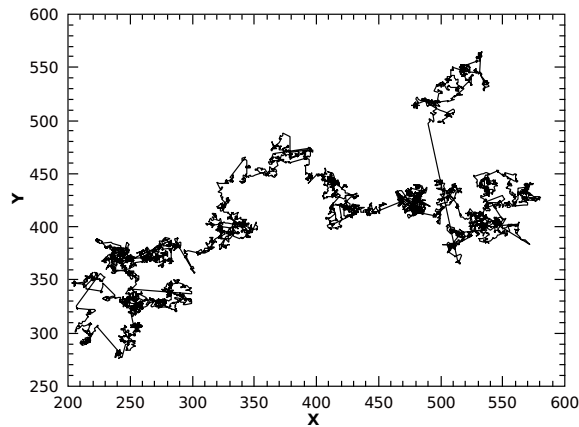


Figura 2.4: Trajetórias características dos processos difusivos.

menos na Natureza. As primeiras observações destes processos difusivos foram feitas por Robert Brown (1827) no movimento de grãos de pólen em superfícies de fluídos. No entanto, é no século XX que Albert Einstein (1905) e Marian Smoluchowski (1906), em trabalhos independentes, conseguem explicar corretamente este fenômeno, que finalmente confirmou a existência dos átomos e as moléculas através de experimentos feitos por Jean Perrin.

2.2.2 Difusão Anômala

Ao considerarmos sistemas com complexidade maior, surgem questões interessantes com respeito à natureza estatística que permite caracterizar, prever e controlar a evolução temporal e espacial de processos não-lineares. Neste sentido, Shlesinger *et al.* [SZK93] consideraram alguns aspectos da cinemática de sistemas hamiltonianos caóticos. Estes sistemas caóticos são caracterizados por um comportamento aparentemente aleatório que pode ser descrito a partir de equações não-lineares deterministas. Procurando entender a natureza destes processos estocásticos, e sua relação com os sistemas dinâmicos, Shlesinger *et al.* mostraram como, ao inserir não linearidades simples no hamiltoniano, surgem estruturas fractais com propriedades estatísticas não padrão

2 Sistemas Complexos e Processos Estocásticos

(por exemplo, diferindo de estatísticas gaussianas). Neste contexto, determinaram que processos aleatórios invariantes por escala⁵ estão associados à *difusão anômala* (isto é, quando a Eq.(2.8) não é verificada) e a fractalidade das trajetórias das partículas nestes sistemas caóticos.

No contexto de caminhadas aleatórias, invariância de escala está relacionada com uma distribuição de probabilidade de passos para a qual diferentes momentos são infinitos. O matemático francês *Paul Lévy* estudou amplamente este tipo de processo aleatório. Sua pesquisa tinha como meta estabelecer em que circunstâncias a distribuição de probabilidade da posição do caminhante aleatório, depois de N passos, exibe a mesma distribuição que os passos individuais, exceto por fatores de escala [Lev37]. Este estudo levou à formulação das *distribuições de Lévy*.

Distribuições de Lévy são distribuições estáveis⁶ definidas no espaço de Fourier como:

$$p(k) = \int_{-\infty}^{\infty} p(x) \exp(ikx) dx = \exp(-|k|^\alpha), \quad (2.9)$$

para $0 < \alpha \leq 2$.

Na Eq.(2.9) encontramos dois casos especiais. Quando $\alpha = 1$ temos a distribuição de Cauchy, enquanto para $\alpha = 2$ temos a distribuição Gaussiana, que apresenta o único caso desta família de distribuições onde o segundo momento existe (é finito).

Aplicando a transformada de Fourier inversa na Eq.(2.9) temos que o comportamento assintótico de $p(x)$ é dado por,

$$p(x) \sim \frac{1}{x^\mu}, \quad (2.10)$$

onde $\mu = 1 + \alpha$. Note que para $\mu \rightarrow 1$ os deslocamentos se aproximam de trajetórias balísticas

⁵ Invariância de escala - *scale-invariant* - é a propriedade ou lei na qual não há mudanças se a escala de tamanho (ou a escala de energia) são multiplicadas por um fator comum. Portanto, $f(x)$ é invariante de escala se $f(\lambda x) = \lambda^\Delta f(x)$, para alguma escolha do expoente Δ , e para todas as dilatações λ . Por exemplo, para $f(x) = x^n$ temos que $f(\lambda x) = (\lambda x)^n = \lambda^n x^n = \lambda^n f(x)$.

⁶ Seja X_1, X_2, \dots variáveis aleatórias *i.i.d.* distribuídas segundo $P(X)$. A distribuição $P(X)$ é estável se a variável aleatória $S_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n$ está distribuída segundo a mesma distribuição de probabilidade $P(X)$: $S_n \stackrel{d}{=} c_n X$, para $c_n > 0$ [Fel68].

(Fig.(2.5)), no entanto, para $\mu > 3$ o deslocamento segue trajetórias Brownianas, (Fig(2.4)).

Para estas distribuições, dadas basicamente por lei de potências, os momentos de ordem m divergem se $m \geq \mu - 1$ (para $\mu < 3$). Devido a tal divergência do segundo momento, quando $\mu < 3$ o comportamento assintótico da soma de variáveis aleatórias *i.i.d* não segue o teorema do limite central (Seç.2.3).

As caminhadas aleatórias governadas por tais distribuições são conhecidas como *voos* e *caminhadas de Lévy*. Neste caso, segundo a Eq.(2.10), existem passos de tamanhos longos (mas raros), que contribuem significativamente no deslocamento total do caminhante.

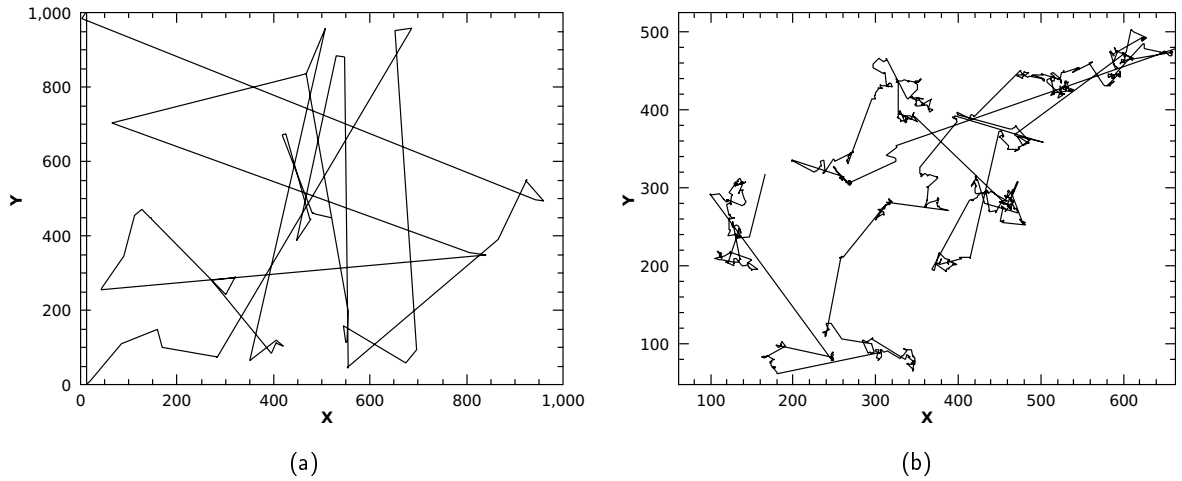


Figura 2.5: Trajetórias características dos processos aleatórios com difusão anômala. Em particular, mostramos os passos fornecidos pela distribuição de Lévy $\mu = 1.1$ e $\mu = 2$ (em (a) e (b) respectivamente).

Nos voos de Lévy, a duração de cada passo é independente de seu tamanho. A velocidade é proporcional ao comprimento do passo e portanto, o tempo é proporcional ao número de passos. Como consequência, o deslocamento quadrático médio não tem uma relação explícita com o tempo. Isto faz com que em geral não seja possível uma aplicação direta de voos de Lévy em fenômenos físicos que exijam tempos característicos.

Por outro lado, nas caminhadas de Lévy, a velocidade do caminhante é constante e inde-

pendente do comprimento dos passos. O tempo da caminhada é proporcional ao deslocamento total desta. Portanto, o deslocamento quadrático médio pode ser escrito em função do tempo como

$$\langle x^2 \rangle \sim t^{2H}, \quad (2.11)$$

onde $H > 1/2$ é o expoente de Hurst. Isto mostra como o deslocamento quadrático médio cresce mais rapidamente que a relação linear na difusão normal, para a qual $H = 1/2$ (Eq.(2.8)). Deste modo, é possível a modelagem de processos com difusão anômala a partir das caminhadas de Lévy⁷.

Na prática, uma vez que a evolução temporal dos voos de Lévy é mais simples, podemos estudar os processos de difusão anômala baseados em voos de Lévy, levando em conta que o deslocamento total percorrido corresponde ao tempo total da caminhada.

2.3 Teorema do Limite Central Generalizado

Quando assumimos uma variável definida como a soma de variáveis aleatórias amostradas segundo a distribuição de Lévy, encontramos dois comportamentos assintóticos distintos de acordo com o valor de μ .

Seja S_N a soma de N variáveis aleatórias positivas e independentes, todas distribuídas segundo a distribuição de Lévy $P(s) \sim \frac{1}{s^\mu}$ (Eq.2.10) (a rigor esta não é a distribuição de Lévy e sim uma lei de potência, mas uma vez que para nossas análises são os comportamentos decorrentes de passos longos que nos interessam, iremos usar indistintamente a designação distribuição de Lévy para leis de potência):

$$S_n = \sum_{i=1}^N s_i. \quad (2.12)$$

Quando $\mu \geq 3$, tanto $\langle s \rangle$, como $\sigma = \langle s^2 \rangle - \langle s \rangle^2$ existem e o teorema de limite central (TLC)

⁷Apesar de sub-difusão ($H < 1$) ser possível, nós não iremos discutir este caso aqui.

2 Sistemas Complexos e Processos Estocásticos

[Fel68] é válido. Definindo uma nova variável t por:

$$S_n = N \langle s \rangle + \sigma N t, \quad (2.13)$$

o TLC estabelece que para N grande, t converge a uma variável aleatória caracterizada por uma distribuição gaussiana dada por:

$$G(t) = (2\pi)^{1/2} \exp(-t^2/2), \quad (2.14)$$

com $\langle t \rangle = 0$ e $\sigma(t) = 1$.

Portanto, independentemente da forma de $P(s)$, temos que:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} P \left(t_1 \leq \frac{S_N - \langle s \rangle N}{\sigma \sqrt{N}} \leq t_2 \right) = \int_{t_1}^{t_2} dt G(t). \quad (2.15)$$

Para $\mu < 3$, o valor do deslocamento quadrático médio diverge e deste modo o TLC já não tem validade. No entanto, devido ao trabalho de Paul Lévy, sabemos que é possível estabelecer um comportamento assintótico para a soma de variáveis com distribuições de probabilidade onde o segundo e/ou primeiro momento divergem.

Embora aqui não iremos apresenta derivações rigorosas⁸, podemos resumir os principais resultados como segue.

Para $2 < \mu < 3$, o primeiro momento existe mas a variância é infinita. Definindo uma nova variável t por:

$$S_N = N \langle s \rangle + N^{1/(\mu-1)} t. \quad (2.16)$$

Temos que o TLC generalizado estabelece que t é uma variável aleatória distribuída para N grande conforme à função $L_{(\mu-1)}(t)$ que depende unicamente de $(\mu - 1)$. Mais precisamente,

⁸Uma demonstração formal do teorema de limite central generalizado se pode encontrar em [Fel68].

2 Sistemas Complexos e Processos Estocásticos

podemos escrever

$$\lim_{N \rightarrow \infty} P \left(t_1 \leq \frac{S_n - \langle s \rangle N}{N^{1/(\mu-1)}} \leq t_2 \right) = \int_{t_1}^{t_2} dt L_{(\mu-1)}(t) \quad (2.17)$$

Onde $L_{(\mu-1)}(t) \sim \frac{1}{t^\mu}$ é a distribuição de Lévy.

No caso $\mu < 2$ tanto o primeiro como o segundo momento de s divergem, em consequência S_N cresce mais rápido que o número de termos N . Deste modo temos que,

$$S_N = N^{1/(\mu-1)} t. \quad (2.18)$$

Novamente temos que t é uma variável aleatória distribuída para N grande conforme a função $L_{(\mu-1)}(t)$. Em analogia com a Eq.(2.17) temos que:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} P \left(t_1 \leq \frac{S_n}{N^{1/(\mu-1)}} \leq t_2 \right) = \int_{t_1}^{t_2} dt L_{(\mu-1)}(t). \quad (2.19)$$

3 O Problema de Busca Aleatória

3.1 Busca aleatória e sua Motivação

Como foi destacado anteriormente, a natureza apresenta inúmeros exemplos de sistemas que mesmo encontrando-se fora do equilíbrio, apresentam estados estáveis. Tais sistemas podem desenvolver correlações de longo alcance, associadas aos mecanismos microscópicos que controlam a sua evolução temporal. No caso particular de processos de reação-difusão entre distintas espécies, o caráter estocástico dos encontros (interações entre as componentes) permite modelar, sob certas condições, a evolução do sistema como um problema de busca aleatória. Deste modo, com base nas regras dinâmicas do buscador e do alvo (o caso de duas espécies), é possível analisar como aspectos associados a difusão em baixas escalas afetam a dinâmica global do sistema [BCF+02, VRL08].

A variedade e riqueza das situações que podem ser descritas como um problema de busca aleatória permitem o uso de diferentes ferramentas da física estatística (por exemplo, teoria de probabilidade e aproximação do campo médio) para discutir fenômenos em uma ampla variedade de áreas, como por exemplo em óptica (arrefecimento a laser) [BBA+03], tecnologia da informação (buscas automatizadas em bases de dados de alta capacidade) [PCa95], ecologia teórica (comportamento animal de busca - *Foraging Theory* -) [VRL08], etc.

Neste contexto de busca aleatória a dependência da taxa de encontros com a distribuição (de probabilidade) dos passos do buscador tem motivado vários estudos. Estes trabalhos buscam

3 O Problema de Busca Aleatória

principalmente formular modelos de busca ótimos, baseados em estratégias (caracterizada pela distribuição de probabilidade dos passos do buscador) que minimizam a distância total percorrida ou o gasto energético.

Do ponto de vista ecológico, necessidades inerentes aos seres vivos como alimentar-se ou reproduzir-se fazem das interações entre organismos uma atividade vital. Assim, a dinâmica dos organismos associada a estes encontros é determinante no entendimento do comportamento animal e das suas implicações evolutivas [BaC09]. Uma vez que a taxa de encontros torna-se decisiva para a sobrevivência do indivíduo (ou mesmo para a adaptação da espécie), acredita-se que o comportamento dinâmico dos organismos esteja associado com estratégias de busca eficientes surgidas de processos de seleção natural.

Resultados empíricos [LKW88] motivaram o desenvolvimento de um modelo de busca que caracteriza os passos do buscador a partir de voos de Lévy. Neste modelo [VBH+99] encontra-se que distribuições do tipo lei de potências fornecem estratégias ótimas quando os alvos estão dispersos e distribuídos aleatoriamente. Deste modo, sob a *hipótese de forrageo de Lévy* - *The Lévy flight foraging hypothesis* - é possível explicar porque os organismos adotam naturalmente comportamentos do tipo Lévy como comportamento padrão nos processos de busca.

3.2 Caracterização do Problema

Na abordagem geral do problema de busca aleatória em um ambiente 2D é possível distinguir dois tipos de agentes que interagem: o buscador (agente ativo) e o alvo (quase sempre considerado o agente passivo). A informação que o buscador tem sobre o ambiente é restrita às suas imediações (caracterizados por uma distância de detecção). Também, muitas vezes como hipótese simplificante, considera-se que os alvos estão localizados e distribuídos aleatoriamente, porém de forma uniforme, no ambiente de busca.

Devido à carência de informação do buscador sobre a localização exata dos alvos, o mesmo

3 O Problema de Busca Aleatória

é forçado a empreender uma caminhada aleatória para encontrar um determinado número de objetos procurados. De fato, podemos definir X_i como a variável aleatória associada ao espaço amostral de comprimentos do passo i efetuado pelo buscador, onde os eventos possíveis, $\ell_1, \ell_2, \ell_3, \dots$, estão determinados pela distribuição de probabilidade :

$$P\{X_i = \ell_i\} = f(\ell_i), \quad (3.1)$$

com $f(\ell_i)$ definindo a estratégia estatística de busca.¹

Cada sucesso do buscador (encontro de um alvo) está vinculado a uma sequência de passos (tentativas frustradas), $\{X_n\} = X_1, X_2, \dots, X_n$, efetuada para encontrar algum alvo. Esta é uma sequência de variáveis aleatórias *i.i.d.* caracterizada pela função de distribuição (3.1).

Definimos a distância total entre dois encontros, após n passos, como a soma S_n de todos os elementos de $\{X_n\}$,

$$S_n = X_1 + \dots + X_n. \quad (3.2)$$

Deste modo, a função de distribuição $P\{S_n = s_n\}$ dos eventos possíveis de S_n converge assintoticamente conforme estabelecido no teorema de limite central generalizado (Seç.(2.3)).

Definindo o primeiro momento de S_n , obtemos a distância total média $\mathbf{E}(S_n)$ e a eficiência da busca, $\eta = 1/\mathbf{E}(S_n)$. Portanto, a estratégia estatística $f(\ell_i)$ que minimiza a função $\mathbf{E}(S_n)$ pode ser considerada uma estratégia ótima.

Aqui é importante mencionar que no contexto acima estabelecido, nosso objetivo é estudar quais são as estratégias ótimas quando o buscador enfrenta ambientes heterogêneos, os quais apresentam mudanças tanto da densidade de alvos, ρ , como da capacidade de detecção do buscador, r_v . Também queremos estudar as mudanças na dinâmica a pequenas escalas que levam as mudanças nas estratégias ótimas.

¹Embora possa existir uma correlação nos ângulos, neste trabalho vamos assumir que a distribuição destes é sempre uniforme, logo a estratégia de busca é toda calçada na escolha da função $f(\ell_i)$.

3.3 Modelo dos voos de Lévy para Buscas Aleatórias

O modelo de busca de Lévy supõe que as orientações de cada passo do buscador são sorteadas a partir de uma distribuição uniforme e o comprimento de cada um deles é escolhido seguindo a distribuição de probabilidade de Lévy,

$$P\{X_i = \ell_i\} \sim \ell_i^{-\mu}, \quad (3.3)$$

com $1 < \mu \leq 3$ e ℓ_i o comprimento do i – *ésimo* voo. Aqui é o parâmetro μ que controla o decaimento assintótico da função de distribuição e portanto determina o mecanismo difusivo da estratégia de busca (difusão normal ($\mu \geq 3$) e difusão anômala, superdifusão, ($1 < \mu < 3$)).

Neste modelo proposto por Viswanathan *et al.* [VBH+99] as relações entre buscador-alvo não são levadas em conta e a aprendizagem é minimizada. Além disso, a dinâmica do buscador é determinada a partir de regras simples de comportamento conforme se apresenta a seguir, Fig.(3.1):

1. Se há um alvo localizado dentro do raio de “visão direta”, r_v , então o buscador caminha em linha reta até o mesmo.
2. Se não há nenhum alvo dentro do raio de visão, então o buscador escolhe uma direção aleatoriamente e uma distância ℓ_j da probabilidade de distribuição (3.4). Então, se move gradualmente para o novo ponto, procurando constantemente ao longo do caminho um novo alvo dentro de seu raio de visão r_v . Se o buscador não detecta um alvo, ele para após de percorrer a distância ℓ_j e escolhe uma nova direção e uma nova distância ℓ_{j+1} . Caso contrário, ele segue até o alvo segundo a regra (1).

Levando em conta a presença de um truncamento - *cutoff* - inerente às dimensões finitas do ambiente de busca, onde se encontram os alvos, na verdade consideramos uma distribuição

3 O Problema de Busca Aleatória

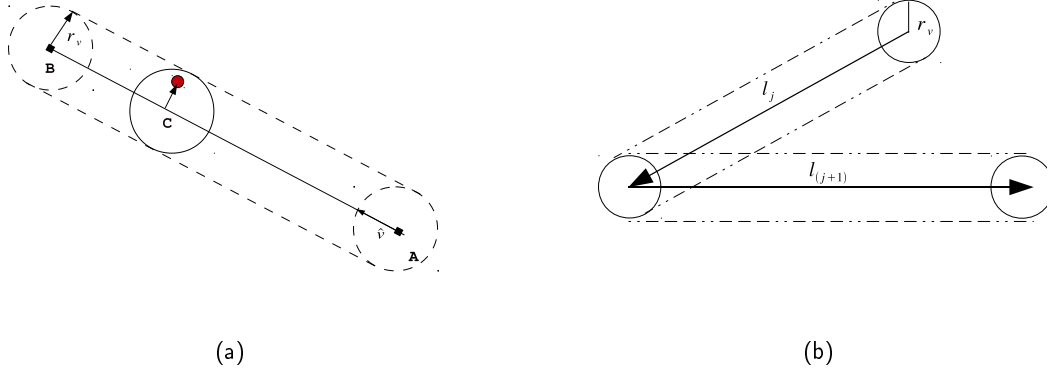


Figura 3.1: Comportamento dinâmico do buscador em um ambiente de alvos localizados e distribuídos aleatoriamente. (a) O buscador inicialmente em A procura constantemente por um alvo até alcançar o ponto B. Se ao longo da distância $\ell_j = \overline{AB}$, encontra um alvo na área de “visão direita” (linhas tracejadas, $A \sim 2r_v\ell_j$), ele caminha em linha reta até o mesmo (como se mostra em C). (b) Se o buscador não encontra alvo nenhum na distância $\ell_j = \overline{AB}$, ele escolhe um novo passo da distribuição $P(\ell_j)$ e um novo ângulo de uma distribuição uniforme. O buscador escolhe i passos até encontrar um alvo.

truncada de Lévy [MaS94],

$$T(\ell_i) = \begin{cases} 0, & \ell_i > l_T, \\ \ell_i^{-\mu}, & r_v \leq \ell_i \leq l_T, \\ 0, & \ell_i < r_v, \end{cases} \quad (3.4)$$

Onde l_T é o comprimento de truncamento - *cutoff length*.

A partir de uma aproximação do tipo “campo médio” é possível encontrar uma solução analítica da distância média percorrida pelo buscador entre dois encontros sucessivos. Seja λ o caminho livre médio do buscador entre dois alvos sucessivos (análogo à teoria cinética de gases em 2D, $\lambda \equiv (2r_v\rho)^{-1}$). Assim, o tamanho médio de um passo é,

3 O Problema de Busca Aleatória

$$\langle \ell \rangle \approx \frac{\int_{r_v}^{\lambda} dx x^{1-\mu} + \lambda \int_{\lambda}^{\infty} dx x^{-\mu}}{\int_{r_v}^{\infty} dx x^{-\mu}} = \left(\frac{\mu-1}{2-\mu} \right) \left(\frac{\lambda^{2-\mu} - r_v^{2-\mu}}{r_v^{1-\mu}} \right) + \frac{\lambda^{2-\mu}}{r_v^{1-\mu}}. \quad (3.5)$$

O segundo termo considera o truncamento natural dos passos do buscador depois de ter percorrido uma distância λ , já que como supõe uma teoria de campo médio, ele sempre vai encontrar algum alvo dentro desta distância.

A eficiência da busca $\eta(\mu)$ está definida como a razão entre o número de alvos visitados \mathbb{N} e a distância total L percorrida pelo buscador. Como $L = \mathbb{N} \langle \ell \rangle$, então

$$\eta = \frac{1}{N \langle \ell \rangle}, \quad (3.6)$$

onde N é número médio de voos entre dois encontros sucessivos.

No caso de alvos re-visitáveis [BHK+01], sabe-se que

$$N \sim \left(\frac{\lambda}{r_v} \right)^{(\mu-1)/2}. \quad (3.7)$$

Considerando então a expressão anterior para η , $\frac{d\eta}{d\mu} = 0$ estabelece a estratégia estatística ótima, dada por,

$$\mu_{opt} = 2 - \delta, \quad (3.8)$$

onde $\delta \sim 1/[\ln(\lambda/r_v)]^2$ (note que em geral δ é um número pequeno, logo desprezível, no limite de baixas densidades). Este μ leva à maior taxa de encontros quando a busca é desenvolvida em um ambiente com baixa densidade de alvos re-visitáveis.

Estudos posteriores de modelos de busca aleatória baseadas em voos de Lévy [RBM+09, VRL08] levaram em conta diferentes configurações do cenário de busca. Por exemplo, foram considerados mudanças na distribuição e mobilidade dos alvos, em diferentes geometrias para o ambiente de busca, etc. Estes trabalhos permitiram mostrar como o mecanismo difusivo

ótimo depende das condições nas quais se desenvolve a busca. Por outro lado, estudos em caminhadas deterministas [SBM+07, BMR+04] mostram que um comportamento tipo Lévy pode surgir como consequência da interação entre um ambiente desordenado e um caminhante que se comporta sob regras deterministas.

Desta forma, a otimização da busca aleatória está fortemente condicionada ao tipo de ambiente em que o processo ocorre. Este portanto será o enfoque do presente trabalho.

3.4 Contexto Biológico

A física estatística e as caminhadas aleatórias tem sido consideradas ferramentas de muita importância no estudo de movimento animal. De fato, nos últimos anos tem-se encontrado evidências de como o comportamento dos organismos e seu modo de reagir conforme as mudanças do ambiente - *feedback*² - estão relacionados com estratégias estatísticas que visam otimizar retornos biológicos, estabelecidas na aborgem do problema de busca aleatória. Deste modo, a análise e o entendimento do comportamento animal através de perspectivas ecológicas e evolutivas tem sido possíveis sob os fundamentos da física estatística e o problema de busca aleatória [BaC09].

Especificamente, as interações biológicas representam um exemplo de processos de reação-difusão entre duas espécies (predador-presa, macho-fêmea) [BCF+02, VRL08]. Na hipótese de que o predador carece de informação sobre a localização das presas, torna-se necessário a formulação do problema dos encontros biológicos como um problema de busca aleatória. Devido à existência de fatores ecológicos que condicionam o sucesso destes encontros, a escolha de estratégias eficientes de busca é determinante na sobrevivência ou aptidão - *fitness* - do

² Feedback: Mecanismos de homeostase

Homeostase: propriedade de um sistema aberto, seres vivos especialmente, de regular o seu ambiente interno para manter uma condição estável, mediante múltiplos ajustes de equilíbrio dinâmico controlados por mecanismos de regulação interrelacionados.

3 O Problema de Busca Aleatória

indivíduo ou da espécie.

Num panorama evolutivo, surge o interesse em entender como a necessidade de buscas eficientes está associada com pressões de seleção natural que levam à adaptação do comportamento do organismo conforme estratégias ótimas (ou sub-ótimas) de busca [Bar09]. No entanto, a existência concreta desta relação ainda está em discussão.

Nesse sentido, existem vários modelos de caminhadas aleatórias propostos como estratégias ótimas no contexto dos encontros biológicos. Entre elas temos os voos e caminhadas de Lévy [VRL08, RBM+09], caminhadas intermitentes [BLM+06, Rey09] e caminhadas aleatórias correlacionadas (CRW) [CPB08, CHP+04]. Porém, fica claro que estes modelos teóricos precisam estar fundamentados em fatos empíricos para poderem ser usados em situações realísticas.

Em particular, encontrou-se que a distribuição de passos do tipo Lévy otimiza a taxa de encontros em ambientes de busca com alvos dispersos. Deste modo, a hipótese de forrageio de Lévy sugere que o comportamento dos organismos deve ter evoluído até adaptar-se a esta estratégia de busca quando os nutrientes no ambiente são escassos.

Evidências empíricas do comportamento de Lévy foram encontradas em mamíferos, insetos e algumas espécies de aves [VBH+99] (por exemplo, albatrozes errantes (*Diomedea exulans*), zangões (*Bombus terrestris*) e veados (*Dama dama*)). No entanto, estes indícios tem sido centro de controvérsia [EPW+07], principalmente pela precisão dos métodos estatísticos empregados para identificar as distribuições de lei de potências. Isto levou à formulação de novos métodos para a análise dos dados empíricos, que tem permitido encontrar forte evidência do desenvolvimento de estratégias de Lévy. Entre estes organismos temos: espécies africanas de chacal (*Canis adustus*) [ARM+02], dinoflagelados (*Oxyrrhis marina*) [BPP+03], abelhas (*Apis mellifera*) [RSM+07, RSR+07] e mais recentemente foram encontradas fortes evidências em 14 espécies marinhas [HQD+10], como por exemplo o tubarão-azul (*Prionace glauca*) e peixe-lua (*Mola mola*).

3 O Problema de Busca Aleatória

Desta forma, uma pergunta extremamente pertinente é a seguinte: quando a análise empírica mostra que certo organismo foge daquilo esperado pela hipótese de Lévy de busca ótima, devemos creditar o resultado a problemas estatísticos, ou a condições concretas do ambiente de busca que invalidam as condições necessárias para que, por exemplo, $\mu = 2$ seja o expoente ótimo? Detalhar como o ambiente altera as condições de otimização do problema de busca aleatória é assim de grande interesse científico e prático.

4 Densidade de Alvos e Estratégias Ótimas de Busca

4.1 Heterogeneidade do Ambiente de Busca

Os fatores bióticos e abióticos ¹ condicionam a vida em um ecossistema e são determinantes na análise dos padrões de movimento animal. Em particular, as espécies migratórias são forçadas a empreender viagens longas para satisfazer as suas necessidades nutricionais ou reprodutivas, enfrentando ambientes onde tais fatores podem mudar drasticamente. Deste modo, mecanismos de ajustes nas estratégias de busca tornam-se indispensáveis para a sobrevivência de indivíduos ou até mesmo de espécies como um todo.

Recentemente, Humphries *et. al.* [HQD+10] estudaram os padrões de movimento de alguns predadores em mar aberto (tubarões macro-predadores, tubarões planktivorous, atuns, peixes agulha, peixes-lua de oceano, etc). Levando em conta a natureza migratória destas espécies marinhas, conseguiram testar a validade da hipótese de forrageo de Lévy em ambientes com diferentes distribuições de recursos. Humphries e colaboradores encontraram fortes indícios confirmando que vários tipos de peixes desenvolvem naturalmente a estratégia ótima de Lévy ($\mu \sim 2.0$) quando a disponibilidade de nutrientes é escassa, como também verificaram que

¹ Os Fatores Bióticos são ocasionados pelas interações entre os seres vivos para sobreviver dentro de um ecossistema (competição, depredação, etc) e os Fatores Abióticos estão associados com as componentes físico-químicas do ambiente que podem influenciar o ecossistema (luz, temperatura, etc.).

4 Densidade de Alvos e Estratégias Ótimas de Busca

diferentes espécies naturalmente se readaptam à estratégia Browniana quando os nutrientes no ambiente tornam-se abundantes.

Motivados por tais resultados, neste capítulo apresentaremos o estudo do efeito da densidade dos alvos ρ sob a eficiência dos encontros no problema de busca aleatória de Lévy. Analisaremos os aspectos dinâmicos a pequenas escalas que geram estas mudanças na estratégia ótima de busca. Também estabeleceremos um critério associado ao caminho livre médio, λ , e à capacidade de detecção, r_v , para determinar os regimes difusivos ótimos que maximizam as taxas de encontro dos alvos de acordo com as densidades dos mesmos.

4.2 Adaptabilidade da Estratégia Ótima de Busca em Ambientes Heterogêneos

Como mostrou-se anteriormente, a estratégia de caráter super-difusivo $\mu_{opt} \rightarrow 2.0$ (3.8) otimiza a taxa de encontros em um ambiente de busca com alvos dispersos ($\lambda \gg r_v$ [VBH+99]) e revisitáveis. Este resultado, que caracteriza um ambiente escasso, levanta duas questões interessantes. Suponha que um buscador com capacidade de detecção r_v possa encontrar vários cenários de busca, diferindo apenas em suas densidades de alvos ρ . Então, qual é o máximo valor que ρ pode assumir e que ainda caracterize o ambiente de busca como sendo “escasso”? Analogamente, qual é a estratégia ótima para ambientes cuja densidade não pode ser mais definida como “escassa”?

Para analisar a relação entre a densidade dos alvos e a taxa de encontros, definimos um comprimento característico entre um alvo e seu vizinho mais próximo [SBM+07],

$$\ell_0 \sim \sqrt{L^2/N}, \quad (4.1)$$

considerando-se um ambiente 2D de área L^2 e alvos distribuídos sob uma distribuição uniforme.

4 Densidade de Alvos e Estratégias Ótimas de Busca

Note que $\rho = 1/\ell_0^2$ e $\lambda = \ell_0^2/2r_v$.

Também definimos a taxa de voos truncados por

$$\Gamma = \frac{n_{Trun}}{n_T}, \quad (4.2)$$

onde n_{Trun} é o número de voos truncados devido ao encontro de um alvo (voos bem-sucedidos) e n_T é o número total de voos.

Desta forma vamos considerar o modelo de busca de Lévy para um caminhante com a capacidade de detecção r_v constante, que procura alvos em um ambiente caracterizado por um valor de ℓ_0 . Iremos simular então diferentes buscas, assumindo diferentes ℓ_0 , e fazer uma análise comparativa dos resultados. Embora os alvos sejam revisitáveis, supomos que o caminhante pode visitar consecutivamente um número finito de vezes dois alvos vizinhos. Fazemos isto simplesmente para evitar “armadilhas” dinâmicas artificiais nas simulações numéricas. Deste modo, uma regra extra de comportamento para o caminhante é incluída em nosso estudo:

3. Se o buscador visita consecutivamente os mesmos dois alvos por mais de ε^2 vezes, ele escolhe uma nova direção e uma nova distância ℓ_k e então segue a regra 2 descrita anteriormente.

No contexto de encontros biológicos, os organismos ao acharem alguns alvos ou ficam satisfeitos ou tem outras tarefas a desempenhar, portanto em geral se afastam do alvo depois de um certo tempo, mesmo que tal alvo ainda apresente recursos de interesse. Assim, nossa regra 3 representa um contexto de busca realístico.

Em primeiro lugar, vamos considerar a dinâmica do buscador com capacidade de detecção r_v (constante), em ambientes caracterizados por pequenos valores de ℓ_0 . No caso $\ell_0 < r_v$, há uma

²Nas simulações foi considerado $\varepsilon = 5$

4 Densidade de Alvos e Estratégias Ótimas de Busca

mudança no caráter aleatório da busca. Mesmo que o caminhante tenha conhecimento limitado das vizinhanças, a informação que ele obtém do ambiente altamente denso leva ao caminhante a se aproximar a um regimen “determinista” onde se torna muito provável encontrar um alvo em cada tentativa. Este comportamento “determinista” (caminhar até o alvo mais próximo) faz com que a distância percorrida pelo buscador, entre dois alvos sucessos, seja aproximadamente à distância entre um alvo (revisitável) e seu próximo vizinho ($\lambda \rightarrow \ell_0/2$ quando $\ell_0 < r_v$). Nestas condições nenhuma estratégia μ é mais favorável do que outra e portanto, a busca em um ambiente super “saturado” é caracterizada pelos seguintes fatos:

- Todos os voos ℓ_j são bem-sucedidos e portanto $\Gamma_s = 1$.
- Para ambientes com alvos revisitáveis e distribuídos uniformemente $\langle \ell \rangle \rightarrow \ell_0/2$ e $\eta_s \rightarrow \frac{2}{\ell_0}$ (eficiência máxima possível).

Em ambientes com $\ell_0 \rightarrow r_v$, simulamos numericamente 500 vezes a caminhada aleatória na procura de 10^5 alvos, para um buscador com capacidade de detecção $r_v = 50$. Na Fig. (4.1) mostramos a taxa de voos truncados Γ em função da estratégia μ para $\ell_0 = 2r_v, 1.5r_v, r_v$ e no gráfico inserido, a eficiência η em função de μ para cada um dos ℓ_0 . Nesta figura vemos como $\Gamma \rightarrow 1$ ($\eta < \frac{2}{\ell_0}$) conforme $\ell_0 \rightarrow r_v$ ($\ell_0 \geq r_v$). Analisando o crescimento de Γ para as diferentes estratégias, encontramos que as mudanças em ℓ_0 afetam significativamente a taxa de voos truncados quando $\mu \geq 2.0$. Por outro lado, a diminuição de ℓ_0 neste intervalo não traz grandes mudanças quando $\mu = 1.1$. Note que a eficiência é praticamente constante. (Na verdade sendo um pouco melhor para o caso Browniano $\mu = 3.0$)

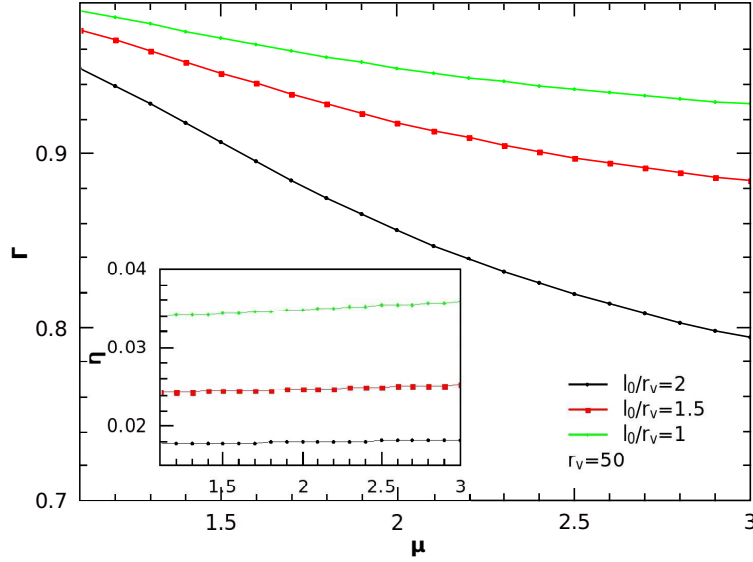


Figura 4.1: Taxa de voos truncados Γ em função da estratégia μ , em ambientes próximos à saturação ($\ell_0 = 2r_v, 1.5r_v, r_v$). A figura inserida mostra a eficiência da busca η , também em função de μ para estes casos de ℓ_0 .

Na Fig. (4.2) apresentamos para estes parâmetros as distâncias médias totais percorridas pelo buscador. Entretanto, separamos as mesmas em duas contribuições: uma correspondente ao comprimento somado dos passos bem-sucedidos T (aqueles passos que são truncados pelo encontro de um alvo), e a outra ao comprimento somado dos passos frustrados F (passos que foram executados em sua totalidade, pois ao longo do caminho não houve um encontro). Na figura notamos como o comprimento total dos passos frustrados decresce quando a densidade de alvos no ambiente aumenta. Para $\mu \rightarrow 1.1$ vemos que o comprimento dos passos truncados governa a eficiência da busca ($\Gamma_{\mu=1.1} \rightarrow 1$ para todo $\ell_0 \rightarrow r_v$), no entanto, para $\mu \leq 2.0$, o comprimento total depende significativamente do comprimento dos voos frustrados ($\Gamma_{\mu=2.0, 3.0} < 0.9$ para $\ell_0 < 1.5r_v$) embora ℓ_0 seja menor. Desta análise podemos concluir que em ambientes de busca próximos à saturação de alvos, re-orientações mais frequentes de voos (ou seja, maiores μ 's)

4 Densidade de Alvos e Estratégias Ótimas de Busca

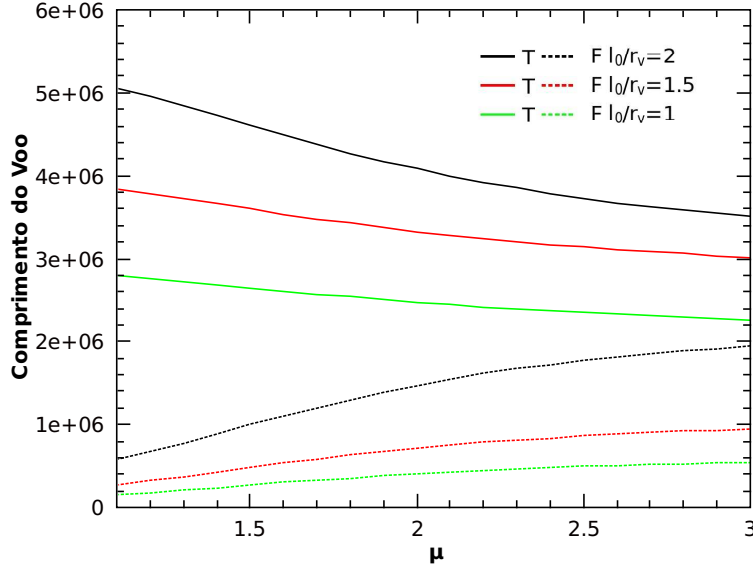


Figura 4.2: Contribuição do comprimento total dos passos frustrados - F - e dos truncados - T -, ao total percorrido pelo buscador, para ambientes próximos à saturação de alvos, $\ell_0 = 2r_v, 1.5r_v, r_v$.

tornam mais eficiente a busca, mesmo que neste caso as tentativas frustradas ocorram em maior número.

Na sequência, vamos considerar $\ell_0 > r_v$. Na Fig. (4.3) mostramos os resultados das simulações da busca de 10^5 alvos em ambientes caracterizados por $\ell_0 = 3.0, 4.0, 4.07, 4.26, 4.47, 4.7, 5.0$, no caso particular de $r_v = 1$. Na Fig. (4.3a) graficamos a eficiência adimensional $\lambda\eta$ em função da estratégia μ , já na Fig. (4.3b) apresentamos a taxa de voos truncados Γ , também em função de μ .

Estes gráficos mostram que, conforme aumenta ℓ_0 e a informação do buscador sobre seu ambiente torna-se mais restrita, as tentativas frustradas são mais comuns. Quando $\Gamma < 0.9$, a distância total média percorrida pelo buscador apresenta mudanças relevantes de acordo com o caráter difusivo μ da estratégia escolhida.

4 Densidade de Alvos e Estratégias Ótimas de Busca

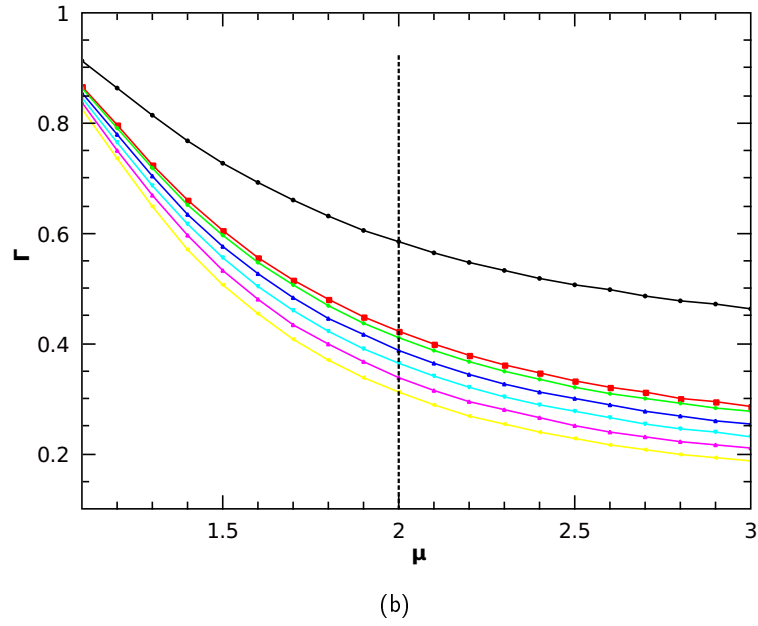
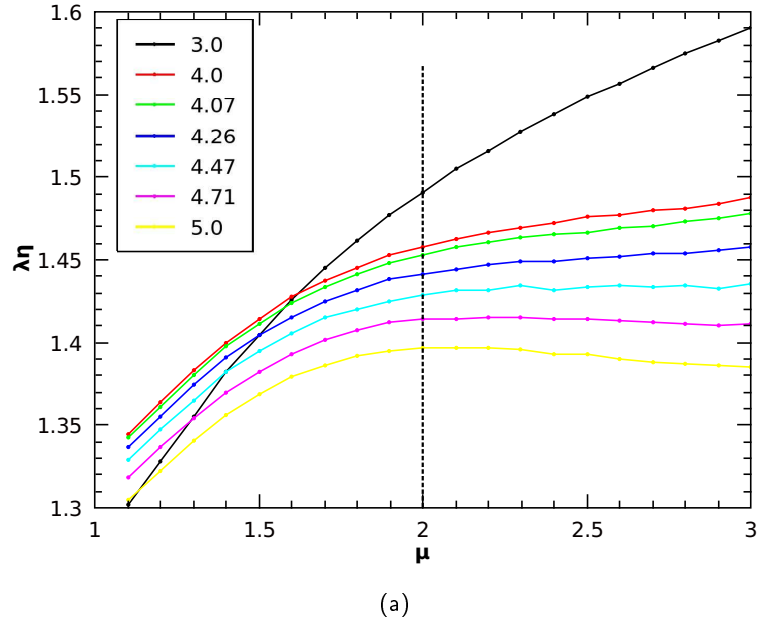


Figura 4.3: Comportamento da eficiência da busca para diferentes $\ell_0 > r_v$. Em (a) mostramos $\lambda\eta$ em função de μ . Em (b) a taxa de voos truncados. Estas curvas foram obtidas para $\ell_0 = 3.0, 4.0, 4.07, 4.26, 4.47, 4.7, 5.0$. Para o caso particular $r_v = 1$.

4 Densidade de Alvos e Estratégias Ótimas de Busca

Em particular, para $\ell_0 = 3.0$ vemos como as estratégias com frequentes mudanças na orientação dos voos ($\mu \geq 2.0$) mostram-se ainda mais eficientes que as estratégias onde predominam os passos longos ($\mu \rightarrow 1.1$).

Neste caso de $\ell_0/r_v = 3.0$ a estratégia Browniana ($\mu = 3.0$) continua otimizando a taxa de encontros. Portanto, este caso está longe de ser considerado “escasso”. Por outro lado, a eficiência da busca diminui rapidamente para $\mu \rightarrow 3.0$ conforme incrementamos a distância entre os alvos (veja, por exemplo $\lambda\eta$ para $\ell_0/r_v = 3.0$ e $\ell_0/r_v = 4.0$).

Na Fig. (4.4) podemos observar que no intervalo de $4.47 \leq \ell_0 \leq 5.0$ a função da eficiência apresenta uma mudança no seu máximo. Na Fig. (4.4a) vemos como para $\ell_0 = 4.47$ a eficiência é aproximadamente a mesma no intervalo $2.1 < \mu_{opt} \leq 3.0$, no entanto, quando $\ell_0 = 5.0$ a eficiência atinge seu máximo em torno de $\mu_{opt} \rightarrow 2.0$.

Para um melhor entendimento de como se dá a mudança da estratégia ótima conforme aumentamos ℓ_0 , apresentamos na Fig. (4.4b) a eficiência adimensional $\ell_0\eta$ em função do comprimento característico adimensional dos alvos, ℓ_0/r_v , para as estratégias $\mu = 1.1, 2.0, 3.0$. O resultado apresentado neste gráfico é bastante conclusivo em relação ao critério que determina quando o ambiente de busca é “abundante” ou “escasso”. Claramente podemos ver como $\ell_0/r_v \rightarrow 4.6$ estabelece o limite entre os regimes ótimos de busca *Browniano* ($\mu = 3.0$) e *superdifusivo* ($\mu_{opt} \rightarrow 2.0$).

No gráfico inserido na Fig.(4.4b) mostramos como ℓ_0 influencia a taxa de truncamentos Γ . Observe que $\Gamma_{\mu=3.0} < \Gamma_{\mu=2.0}$ para todo ℓ_0 , no entanto, o aumento dos voos frustrados (decaimento de Γ) implica um decréscimo maior da eficiência para $\mu = 3.0$ em comparação com $\mu = 2.0$.

4 Densidade de Alvos e Estratégias Ótimas de Busca

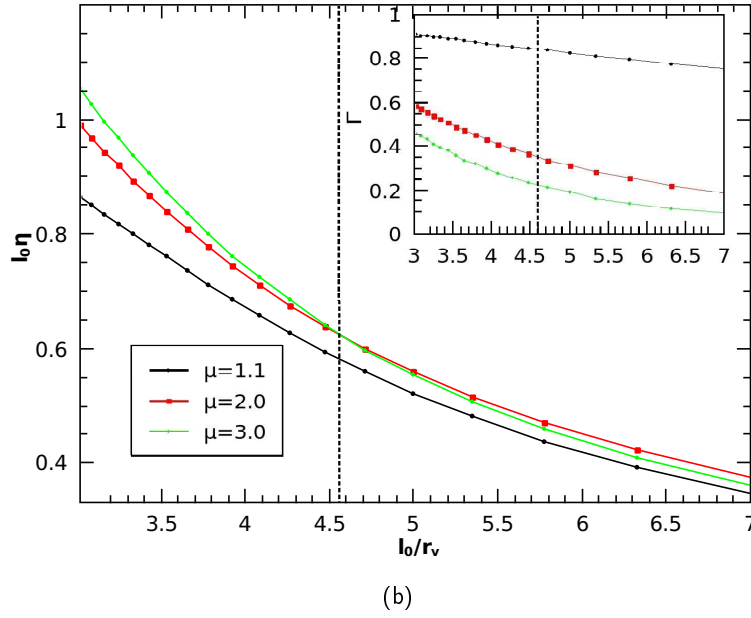
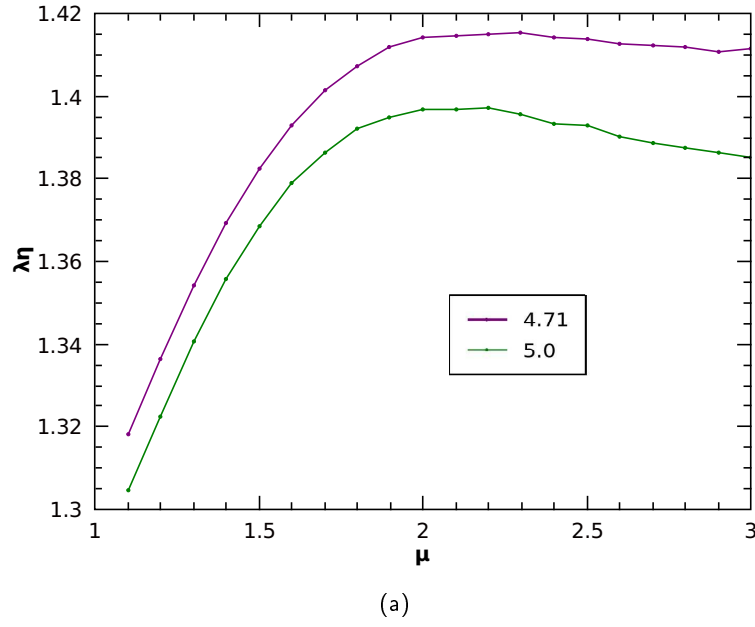


Figura 4.4: Mudança da estratégia ótima devido à densidade de alvos $\rho(\ell_0)$ no ambiente. Em (a) comparamos o comportamento da eficiência quando $\ell_0 = 4.47$ e $\ell_0 = 5.0$. Em (b) mostramos $\ell_0\eta$ em função de ℓ_0/r_v para $\mu = 1.1, 2.0, 3.0$ no intervalo $3.0 \leq \ell_0 \leq 5.0$. Na figura inserida mostramos Γ também em função de ℓ_0/r_v . A linha vertical indica a mudança da estratégia ótima, quando $\ell_0/r_v = 4.6$.

4 Densidade de Alvos e Estratégias Ótimas de Busca

Na Fig.(4.5) mostramos o comportamento do comprimento total dos passos frustrados, F , e dos passos truncados, T , conforme aumenta-se ℓ_0 , para $\mu = 1.1, 2.0, 3.0$. Neste gráfico observamos que $F_{\mu=3.0}$ ($T_{\mu=2.0}$) cresce mais rápido que $F_{\mu=2.0}$ ($T_{\mu=3.0}$). Este comportamento torna-se determinante na competição entre as estratégias de caráter difusivo ($\mu = 3.0$) e anômalo superdifusivo ($\mu \rightarrow 2.0$), já que determinam quando é favorável diminuir as re-orientações dos voos para aumentar o comprimento dos passos ℓ_j escolhidos pelo buscador.

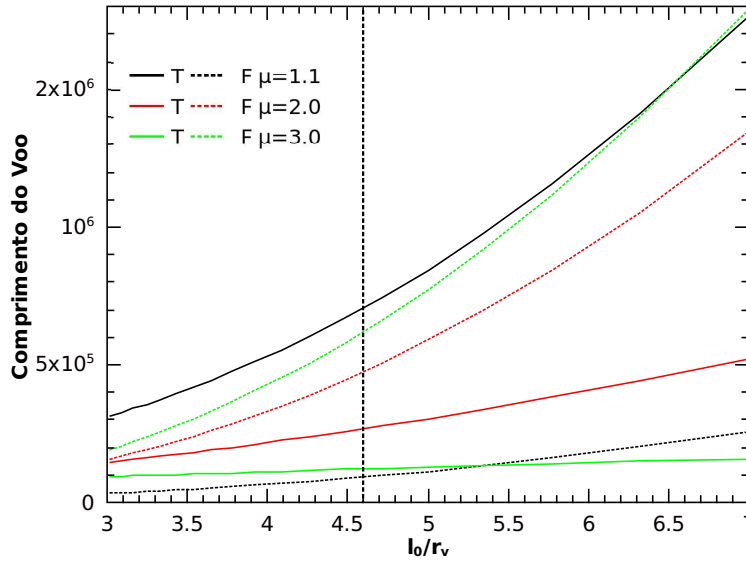


Figura 4.5: Contribuição do comprimento total dos passos frustrados - F - (tracejadas) e dos truncados - T - (cheias), ao percorrido total pelo buscador, em função de ℓ_0/r_v no intervalo $[3,7]$, quando $\mu = 1.1, 2.0, 3.0$ (preta, vermelha e verde respectivamente). A linha vertical indica a mudança na estratégia ótima.

Assim, podemos inferir que quando $\lambda/r_v = \ell_0^2/2r_v^2 \gtrsim 11$, a condição $\lambda \gg r_v$ é satisfeita e portanto o buscador precisa adaptar uma estratégia de caráter super-difusivo para maximizar a taxa de encontros segundo o estabelecido no modelo de busca de Lévy para baixas densidades [VBH+99].

Finalmente, na Fig. (4.6) estudamos o comportamento da eficiência em ambientes de busca

4 Densidade de Alvos e Estratégias Ótimas de Busca

onde $\ell_0 > 4.6$. Na Fig.(4.6a) mostramos a eficiência $\lambda\eta$ em função de μ , para ambientes de busca caracterizados por $\ell_0 = 10, 50, 100, 200$, enquanto na Fig.(4.6b) apresentamos $r_v\eta$ em função de ℓ_0/r_v (no gráfico inserido temos Γ também em função de ℓ_0/r_v). Na Fig. (4.6) notamos que para ambientes mais escassos, o máximo da eficiência comporta-se segundo a Eq.(3.8). Também observamos como o decrescimento de $\eta_{\mu=3.0}$ e $\eta_{\mu=1.1}$ são similares, no entanto, $\eta_{\mu=3.0} > \eta_{\mu=1.1}$ e $\Gamma_{\mu=3.0} < \Gamma_{\mu=1.1}$ para todo ℓ_0 . Além disso, a diferença de $\eta_{\mu=2.0}$ com respeito a $\eta_{\mu=3.0}$ e $\eta_{\mu=1.1}$ torna-se mais relevante conforme aumenta-se a relação entre λ e r_v (Fig.(4.6b)), o que é esperado do modelo original [VBH+99].

4 Densidade de Alvos e Estratégias Ótimas de Busca

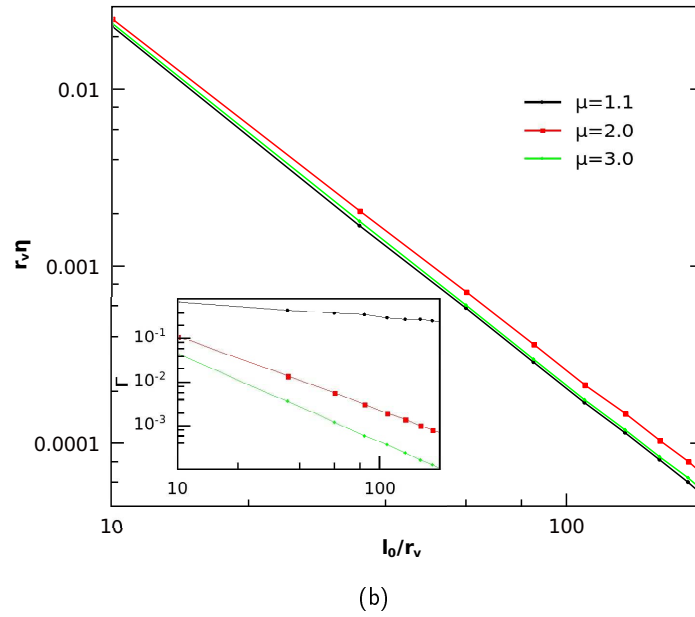
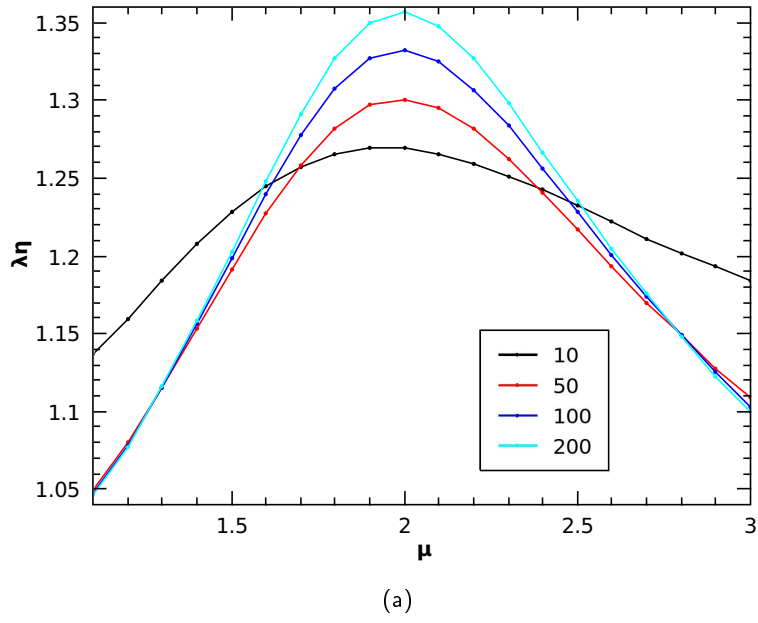


Figura 4.6: Comportamento da eficiência para ambientes mais escassos. Em (a) mostramos $\lambda\eta$ em função de ℓ_0/r_v para $\ell_0 = 10, 50, 100, 200$. Em (b) mostramos $r_v \eta$ (Γ no gráfico inserido) em função de ℓ_0/r_v no intervalo $[10, 200]$ para $\mu = 1.1, 2.0, 3.0$.

5 Capacidade de Detecção do Buscador e Estratégia Ótima de Busca

5.1 O Buscador e a Informação Relativa dos Recursos

O sucesso da busca depende significativamente da habilidade do buscador em extrair informação do ambiente. Na discussão do efeito da densidade na dinâmica da busca aleatória, encontramos que em ambientes saturados de alvos, embora o buscador só tenha informação de uma região restrita do ambiente, ele sempre consegue ter acesso à localização de pelo menos um alvo. A busca se torna uma caminhada determinista, já que o buscador simplesmente escolhe o alvo mais próximo. Por outro lado, a medida que a densidade diminui, um maior esforço de locomoção do buscador é necessário para encontrar alvos. Deste modo, vemos como a incerteza do buscador com respeito à distribuição dos alvos (a cada passo ℓ_j) aliado à abundância dos mesmos “moldam” o comportamento de busca que leva à otimização da taxa de encontros.

Como já foi mencionado, o caráter estocástico das interações biológicas tem permitido sua descrição a partir do problema de busca aleatória. No contexto real destas interações, os fatores abióticos no ecossistema podem afetar a habilidade do predador em detectar (e mesmo capturar) as presas. Em consequência, podem surgir mudanças significativas nas taxas de encontro devido à influência desses fatores externos (visibilidade, dificuldades topográficas de terreno, etc) na busca[Bar09].

5 Capacidade de Detecção do Buscador e Estratégia Ótima de Busca

No caso particular do *forrageo animal* - *animal foraging* - se torna determinante considerar o efeito das interações buscador-ambiente para a análise de estratégias ótimas de busca. Na verdade, tais interações podem trazer limitações notáveis no poder de detecção do buscador (ou seja, na capacidade de localizar presas) e portanto levar a situações adversas de busca [NGR+08]. Em particular, estudos em ecossistemas marinhos mostram como velocidade de correntes e turbulência na água podem afetar de modo considerável comunidades onde os predadores detectam suas presas mediante sinais químicos, como no caso dos siris -*Callinectes sapidus*- e amêijoas -*Mercenaria mercenaria*- [SFW10].

Assim, neste capítulo, estudamos como as variações da capacidade de detecção do buscador r_v provocam mudanças nas estratégias estatísticas que otimizam a taxa de encontros. Também, baseados nos resultados do capítulo anterior, comparamos o efeito conjunto das variações da capacidade de detecção, r_v , e do comprimento característico entre os alvos, ℓ_0 , sobre a eficiência estatística de busca.

5.2 Capacidade de Detecção Constante

Baseados no modelo de busca apresentado no capítulo anterior, vamos analisar como a taxa de encontros depende da habilidade do buscador para obter informação do ambiente. Levando em conta que o acesso à localização dos alvos está determinada pela capacidade de detecção r_v (raio de visão), vamos estudar o comportamento da eficiência para diferentes valores de r_v , supondo que a busca se dá em ambientes com densidade de alvos constante (ℓ_0 fixo).

Simulamos numericamente 200 caminhadas aleatórias na busca de 10^5 alvos para cada buscador com capacidade de detecção constante r_v . No estudo do capítulo anterior, encontramos que para $\ell_0 < r_v$, o comportamento do buscador se aproxima a uma caminhada determinista. Portanto, nesta análise só iremos considerar as variações de r_v no intervalo $(0.5, \ell_0]$ (ou seja,

5 Capacidade de Detecção do Buscador e Estratégia Ótima de Busca

r_v/ℓ_0 no intervalo $(0.01, 1]$, em ambientes de busca caracterizados por $\ell_0 = 10, 50, 100, 200$ ¹.

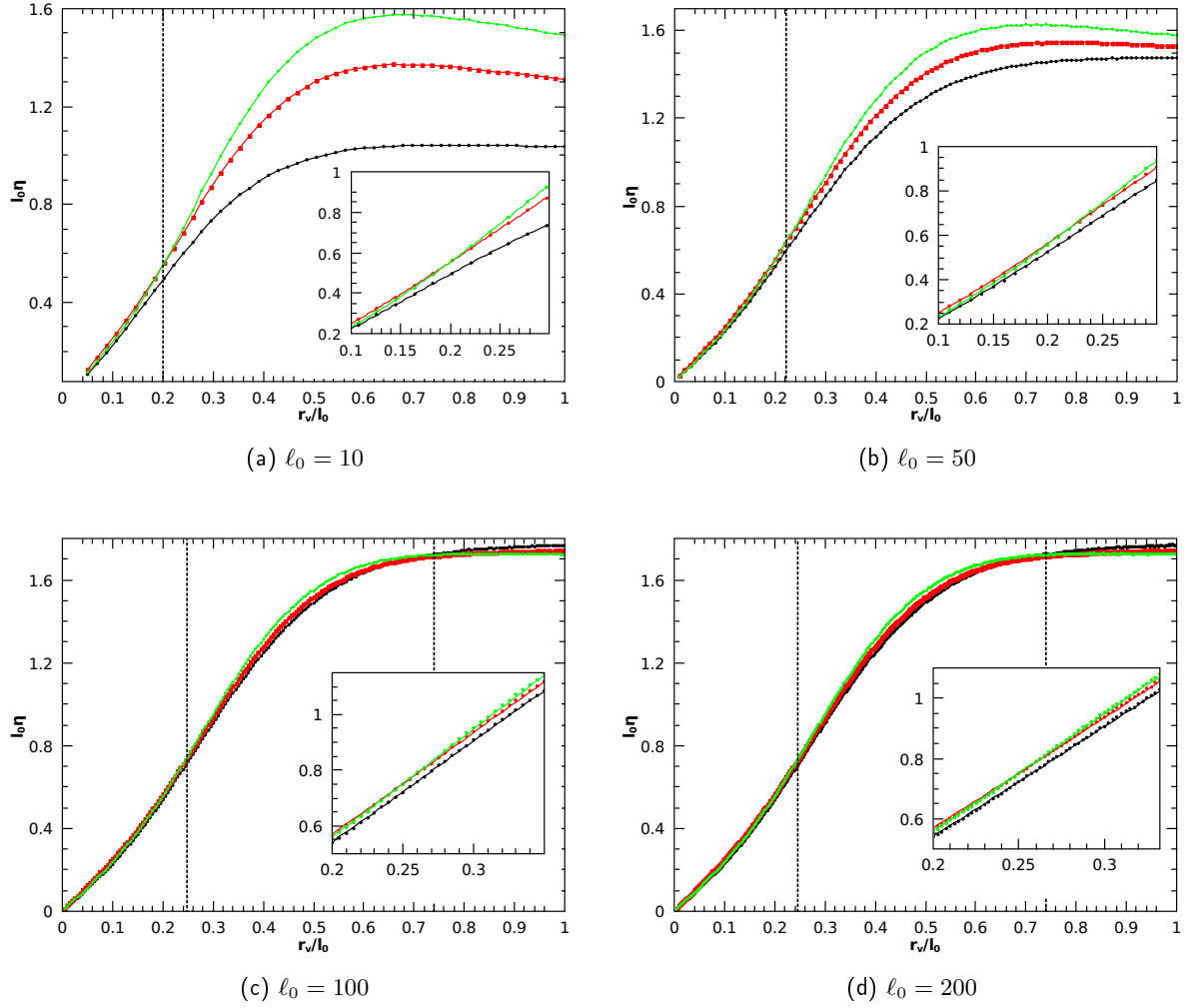


Figura 5.1: Efeito da capacidade de detecção do buscador r_v na eficiência da busca η . Nas figuras se apresenta a eficiência adimensional $\ell_0\eta$ em função da capacidade de detecção adimensional r_v/ℓ_0 . Aqui consideramos $\mu = 1.1, 2.0, 3.0$ (linha preta, vermelha e verde, respectivamente) e ambientes caracterizados por $\ell_0 = 10, 50, 100, 200$. Nas figuras inseridas mostra-se a ampliação de $\ell_0\eta(r_v/\ell_0)$ na vizinhança da transição $\mu_{opt} = 2.0 \rightarrow \mu_{opt} = 3.0$.

¹As grandezas r_v e ℓ_0 estão definidas nas mesmas unidades de comprimento

5 Capacidade de Detecção do Buscador e Estratégia Ótima de Busca

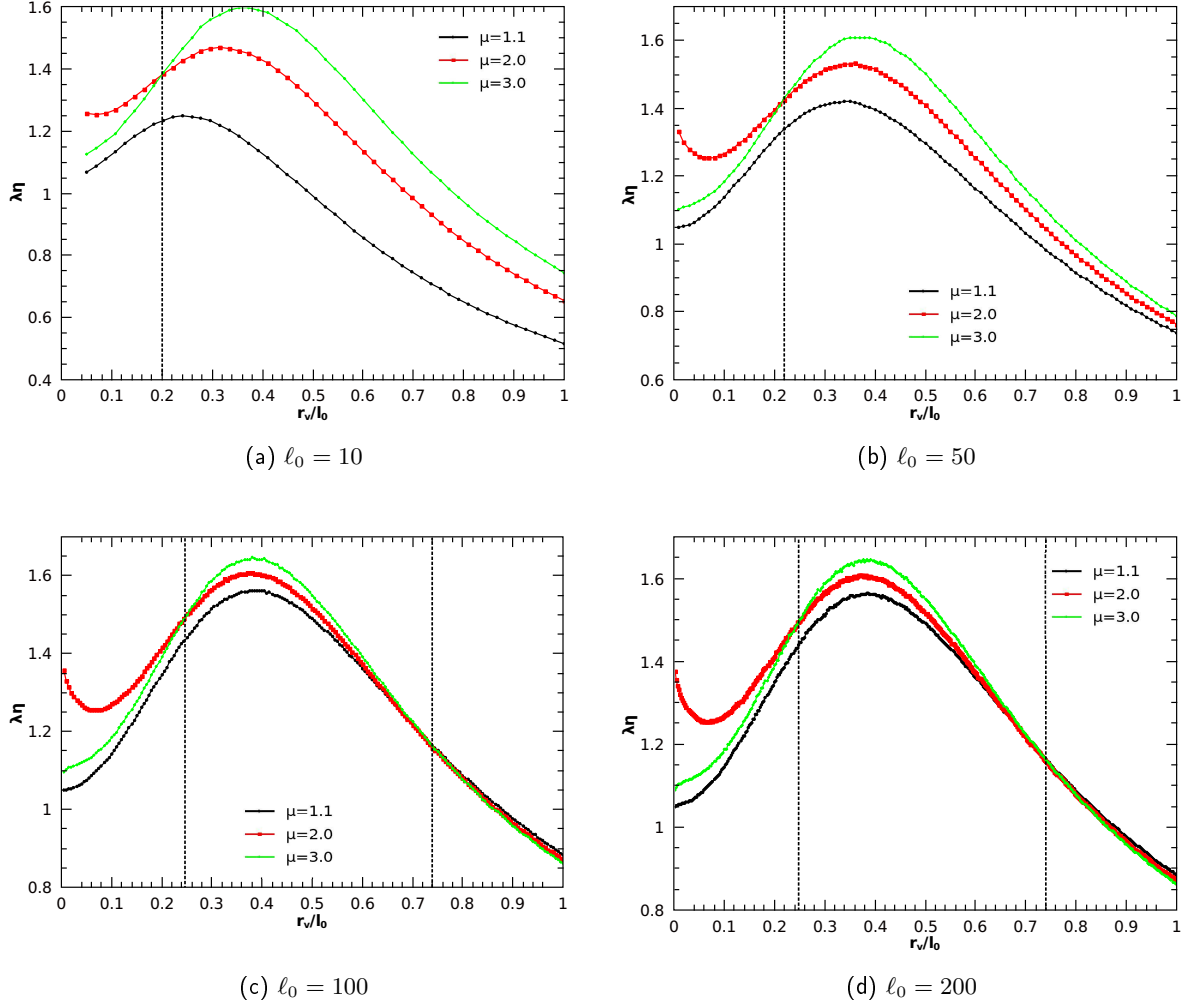


Figura 5.2: Eficiência adimensional $\lambda\eta$ em função da capacidade de detecção adimensional r_v/ℓ_0 . Este gráfico permite visualizar claramente as mudanças na estratégias ótima apresentadas na Fig.(5.1)

A Fig.(5.1) mostra a eficiência (adimensional) $\ell_0\eta$ em função da capacidade de detecção (adimensional) r_v/ℓ_0 , para as estratégias estatísticas de busca $\mu = 1.1, 2.0, 3.0$ (linha preta,

5 Capacidade de Detecção do Buscador e Estratégia Ótima de Busca

vermelha e verde, respectivamente). Cada um destes gráficos apresenta os efeitos das variações de r_v/ℓ_0 em ambientes com diferentes densidades de alvos $\rho = 1/\ell_0^2$ ($\ell_0 = 10, 50, 100, 200$).

Nos gráficos claramente observamos como se estabelecem regimes ótimos conforme a capacidade de detecção aumenta. Para destacar estas mudanças nas estratégias ótimas, conforme r_v varia, na Fig.(5.2) apresentamos a eficiência (adimensional) $\lambda\eta$ em função de r_v/ℓ_0 , lembrando que o caminho livre médio é $\lambda = \ell_0^2/2r_v$. As retas tracejadas nas Fig.(5.1) e Fig.(5.2) indicam os valores de r_v/ℓ_0 onde acontecem as transições.

No intervalo $(0.01, 0.2)$ para r_v/ℓ_0 , encontramos que independentemente do valor de ℓ_0 , $\mu_{opt} \rightarrow 2.0$. No entanto, quando $r_v/\ell_0 \geq 0.2$ se apresenta uma mudança na estratégia ótima de busca que leva à $\mu_{opt} = 3.0$. Na Fig.(5.1) os gráficos inseridos mostram a ampliação de $\ell_0\eta(r_v/\ell_0)$ na vizinhança da transição $\mu_{opt} = 2.0 \rightarrow \mu_{opt} = 3.0$.

Por outra lado, quando $\ell_0 = 10$, observamos que as curvas de eficiência para diferentes μ não convergem conforme $r_v/\ell_0 \rightarrow 1$. Segundo o discutido no capítulo anterior, para $r_v/\ell_0 \rightarrow 1$, o buscador obtém informação suficiente do ambiente que permite-lhe encontrar um alvo em cada tentativa e portanto não faz sentido a escolha de uma estratégia. Assim, concluímos que este comportamento “anômalo” é uma consequência das frequentes armadilhas dinâmicas que o buscador encontra ao longo de seu caminho. Embora nós tivéssemos considerado uma regra dinâmica para evitar estas armadilhas, o fato de ter um ambiente abundante de alvos faz mais provável que o buscador revise os mesmos alvos consecutivamente. Em particular para $\mu = 3.0$, o caráter difusivo da busca (passos de comprimentos pequenos e frequentes re-orientações) faz com que o buscador retorne ao último alvo encontrado com uma probabilidade muito maior, criando uma espécie de movimento restrito a apenas dois sítios, indo e voltando aos mesmos. A isto chamamos de armadilha, e no regime de altas densidades e altos valores de μ , este feito torna-se extremamente comum, sendo uma peculiaridade do modelo.

Por outro lado, vemos que para ambientes com menor densidade de alvos, as estratégias de

5 Capacidade de Detecção do Buscador e Estratégia Ótima de Busca

ℓ_0	$(r_v/\ell_0)_{\mu_{opt}=2.0 \rightarrow \mu_{opt}=3.0}$	$(\lambda/r_v)_{\mu_{opt}=2.0 \rightarrow \mu_{opt}=3.0}$	$(r_v/\ell_0)_{\mu_{opt}=3.0 \rightarrow \mu_{opt}=1.1}$	$(\lambda/r_v)_{\mu_{opt}=3.0 \rightarrow \mu_{opt}=1.1}$
10	0.2	12.5	-	-
50	0.22	10.33	-	-
100	0.24	8.68	0.74	0.91
200	0.25	8	0.74	0.91

Tabela 5.1: Valores de r_v/ℓ_0 e λ/r_v que caracterizam as mudanças da estratégia ótima de busca, para ambientes caracterizados por ℓ_0 .

caráter superdifusivo favorecem a taxa de encontros conforme r_v/ℓ_0 aumenta. Em consequência, para $r_v/\ell_0 \rightarrow 0.74$ o regime ótimo $\mu_{opt} = 1.1$ se estabelece quando consideramos $\ell_0 = 100, 200$.

A Tabela (5.1) reúne os valores de r_v/ℓ_0 e λ/r_v onde se apresentam estas mudanças conforme o valor de ℓ_0 . Comparando as variações de r_v/ℓ_0 e λ/r_v , e levando em conta os resultados obtidos no capítulo anterior (onde se estabeleceram as condições de um ambiente escasso, $r_v/\ell_0 \sim 0.22$ e $\lambda/r_v \gtrsim 11$), concluímos que uma grandeza fundamental para caracterizar o regime de Lévy $\mu_{opt} \rightarrow 2$ é r_v/ℓ_0 . Portanto, quando $r_v/\ell_0 \lesssim 0.25$ a estratégia de superdifusão $\mu_{opt} \rightarrow 2$ se impõe sobre as outras estratégias.

Para um melhor entendimento destas mudanças na estratégia que otimiza a taxa de encontros, estudamos o comportamento da taxa de voos truncados Γ (Eq.(4.2)). Na Fig.(5.3) traçamos Γ em função de r_v/ℓ_0 para as estratégias de busca $\mu = 1.1, 2.0, 3.0$ (linha preta, vermelha e verde, respectivamente). As linhas tracejadas indicam os valores de r_v/ℓ_0 que determinam a mudança de μ_{opt} (Tabela (5.1)).

Analisando a Fig.(5.3) no intervalo $(0.05, 0.4)$ observamos que para todo ℓ_0 , o crescimento de $\Gamma_{\mu=1.1}$ (conforme aumenta r_v/ℓ_0) se distingue significativamente do crescimento de $\Gamma_{\mu=2.0}$ e $\Gamma_{\mu=3.0}$. Vemos que $\frac{\partial^2 \Gamma_{\mu=1.1}}{\partial (r_v/\ell_0)^2} < 0$ em todo este intervalo e portanto a concavidade de $\Gamma_{\mu=1.1}$ é sempre a mesma. Entretanto $\frac{\partial^2 \Gamma_{\mu=2.0}}{\partial (r_v/\ell_0)^2}$ e $\frac{\partial^2 \Gamma_{\mu=3.0}}{\partial (r_v/\ell_0)^2}$ apresentam uma mudança de sinal próximos a $r_v/\ell_0 \rightarrow 0.2$. Assim, com a variação de r_v/ℓ_0 há uma mudança de concavidade das curvas, caracterizando uma mudança qualitativa na taxa de variação de Γ quando o raio de visão r_v

5 Capacidade de Detecção do Buscador e Estratégia Ótima de Busca

aumenta.

Para estabelecer os pontos de inflexão β de $\Gamma_{\mu=2.0}$ e $\Gamma_{\mu=3.0}$ realizamos um ajuste polinomial ($y = ax^3 + bx^2 + cx + d$, onde a, b, c, d são constantes) destas funções no intervalo $[0.1, 0.35]$. Os gráficos inseridos na Fig.(5.3) mostram a ampliação de $\Gamma(r_v/\ell_0)$ neste intervalo, para $\mu = 2.0, 3.0$. Na tabela (5.2) mostramos os valores de $\beta = r_v/\ell_0$ para os quais $\frac{\partial^2 \Gamma}{\partial (r_v/\ell_0)^2} = 0$.

Do comportamento de $\frac{\partial^2 \Gamma}{\partial (r_v/\ell_0)^2}$ na vizinhança $\beta \pm \varepsilon$, onde $\varepsilon > 0$, concluímos que para $r_v/\ell_0 < \beta_{\mu=2.0}$, $\frac{\partial^2 \Gamma_{\mu=2.0}}{\partial (r_v/\ell_0)^2} > 0$ e $r_v/\ell_0 > \beta_{\mu=2.0}$, $\frac{\partial^2 \Gamma_{\mu=2.0}}{\partial (r_v/\ell_0)^2} < 0$, enquanto que para $r_v/\ell_0 < \beta_{\mu=3.0}$, $\frac{\partial^2 \Gamma_{\mu=3.0}}{\partial (r_v/\ell_0)^2} > 0$ e $r_v/\ell_0 > \beta_{\mu=3.0}$, $\frac{\partial^2 \Gamma_{\mu=3.0}}{\partial (r_v/\ell_0)^2} < 0$.

Dois fatos são notáveis aqui:

- Os pontos de inflexão $\beta_{\mu=2.0}$ e $\beta_{\mu=3.0}$ são independentes dos valores ℓ_0 analisados (em primeira aproximação).
- $\beta_{\mu=2.0} < \beta_{\mu=3.0}$.

5 Capacidade de Detecção do Buscador e Estratégia Ótima de Busca

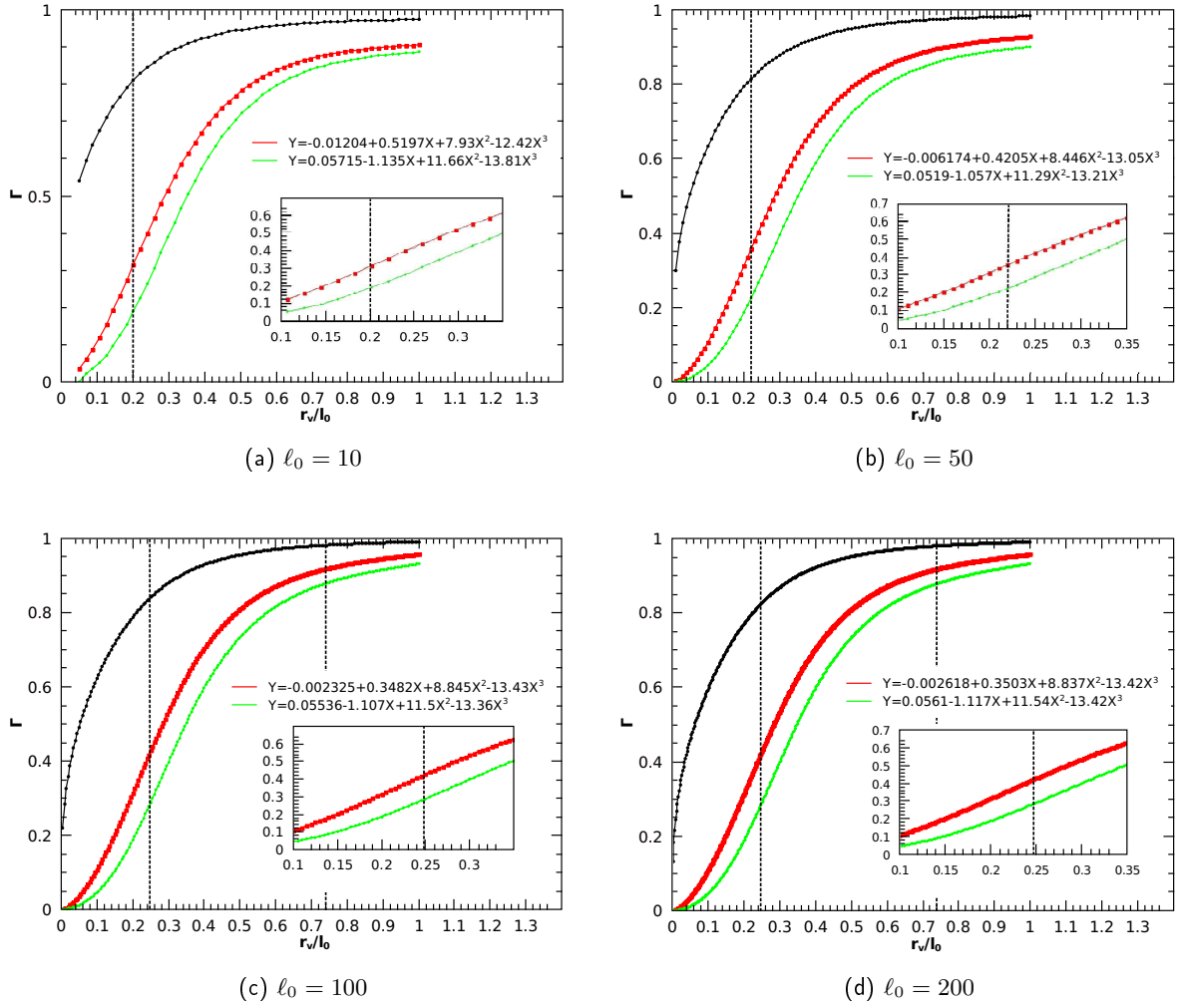


Figura 5.3: Taxa de truncamento Γ em função da capacidade de detecção adimensional r_v/ℓ_0 , para $\mu = 1.1, 2.0, 3.0$ (linha preta, vermelha e verde, respectivamente). Quando a busca se realiza em ambientes caracterizados por $\ell_0 = 10, 50, 100, 200$. Nas figuras inseridas se mostra o ajuste polinomial $\Gamma(r_v/\ell_0)$ no intervalo $[0.1, 0.35]$ para $\mu = 2.0, 3.0$.

5 Capacidade de Detecção do Buscador e Estratégia Ótima de Busca

ℓ_0	$\beta_{\mu=2.0}$	$\beta_{\mu=3.0}$
10	0.21 ± 0.034	0.28 ± 0.001
50	0.21 ± 0.059	0.28 ± 0.039
100	0.21 ± 0.046	0.28 ± 0.059
200	0.21 ± 0.055	0.28 ± 0.058

Tabela 5.2: Pontos de inflexão β da taxa de truncamentos $\Gamma(r_v/\ell_0)$ para as estratégias $\mu = 2.0, 3.0$.

Para entender o significado físico destes pontos de inflexão em $\Gamma_{\mu=2.0}$ e $\Gamma_{\mu=3.0}$, vamos tentar inferir qual é o efeito da variação da capacidade de detecção r_v sobre a probabilidade de encontros seguindo um ponto de vista geométrico.

Como se mostrou na Fig.(3.1), a área que o buscador (de capacidade de detecção r_v) pode varrer ao longo de um passo completo de comprimento ℓ_j é $A \sim 2r_v\ell_j$ (o exato seria $A = 2r_v\ell_j + \pi r_v^2$, mas estamos desprezando este último termo já que $\ell_j > r_v$). Em consequência, um incremento em r_v (Δr_v) traz um incremento na área total de detecção de $\Delta A \sim 2\ell_j\Delta r_v$.

Para estudar como o acréscimo ΔA favorece a taxa de encontros (e portanto, muda a taxa de voos truncados Γ), supomos um ambiente com alvos distribuídos aleatoriamente com $\ell_0 = 100$. Então, consideramos numa direção e localização arbitrárias um passo de tamanho fixo ℓ , definindo assim uma área de detecção A . Para cada passo, assumimos dois raios diferentes, r_{v1} e r_{v2} , com $r_{v1} < r_{v2}$. Repetimos 1000 vezes este procedimento (para calcularmos médias). Finalmente, determinamos o valor médio do incremento relativo do número de alvos Ω , devido ao incremento $\Delta A = 2\ell\Delta r_v$ ($\Delta r_v = r_{v2} - r_{v1}$), definido por

$$\Omega = \left\langle \frac{n_{r_{v2}} - n_{r_{v1}}}{n_{r_{v1}}} \right\rangle, \quad (5.1)$$

onde $n_{r_{v1}}$ e $n_{r_{v2}}$ são o número de alvos ao longo das áreas $A_1 = 2\ell r_{v1}$ e $A_2 = A_1 + \Delta A$, respectivamente.

5 Capacidade de Detecção do Buscador e Estratégia Ótima de Busca

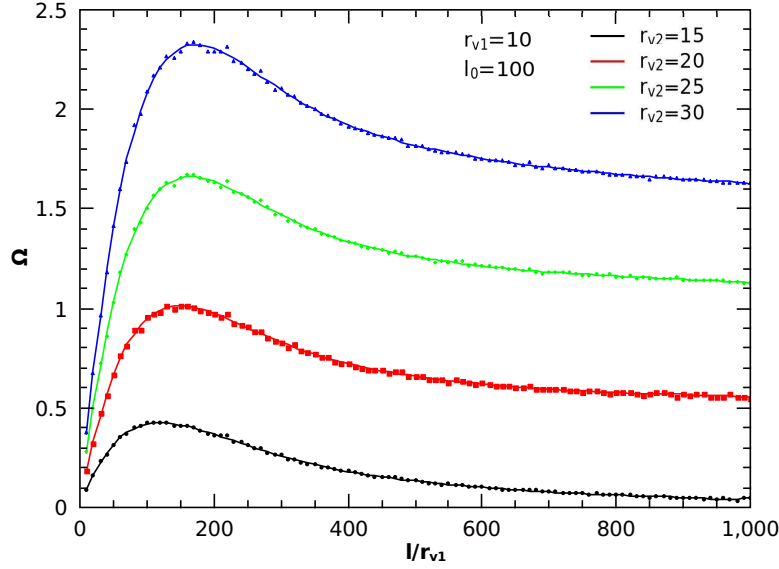


Figura 5.4: Incremento relativo do número de alvos Ω em função do comprimento adimensional ℓ/r_{v1} . Neste gráfico consideramos $r_1 = 10$ e $r_{v2} = 15, 20, 25, 30$.

Na Fig.(5.4) mostramos Ω em função de ℓ/r_{v1} no caso particular de $r_{v1} = 10$ e $r_{v2} = 15, 20, 25, 30$ ($\Delta r_v = 5, 10, 15, 20$, respectivamente). Nestas simulações temos considerado as variações de ℓ no intervalo $[r_{v1}, 10^4]$ (ou seja, ℓ/r_{v1} variando no intervalo $[1, 10^3]$).

Como esperado, neste gráfico podemos ver que conforme aumenta Δr_v , também aumenta a probabilidade de encontrar novos alvos na área de detecção A_2 ($\Omega_{\Delta r_v=5} < \Omega_{\Delta r_v=10} < \Omega_{\Delta r_v=15} < \Omega_{\Delta r_v=20}$). Entretanto, notamos que o incremento relativo do número de alvos Ω tem taxa de variação diferenciada de acordo com o valor de ℓ . Em particular, observamos um crescimento importante de Ω quando ℓ não é muito grande. No entanto, conforme ℓ/r_{v1} aumenta, Ω atinge um máximo ($\frac{\partial \Omega}{\partial (\ell/r_{v1})} = 0$, para $\alpha = \ell/r_{v1}$, onde α depende da grandeza de Δr_v). Em consequência, para $\ell/r_{v1} > \alpha$, Ω decresce lentamente e, finalmente, torna-se aproximadamente constante quando os valores de ℓ/r_{v1} são altos. Assim, a vantagem relativa de se ter raios de detecção maiores diminui quando os passos do buscador

5 Capacidade de Detecção do Buscador e Estratégia Ótima de Busca

são grandes. Como para μ menores temos em geral uma maior quantidade de passos grandes ao longo do processo de busca, fica então claro porque para os μ menores mais rapidamente há uma desaceleração no crescimento da curva de taxa de voos truncados Γ com o aumento de r_v .

Note que na discussão acima não consideramos a situação dinâmica de forrageio, ou seja, explicitamente analisando o ganho relativo de alvos (com o aumento do raio de visão r_v) supondo o buscador efetivamente se locomovendo. Fizemos uma análise estática, apenas com contagem do total de alvos nas áreas A_1 e A_2 .

Para caracterizar a influência do aspecto dinâmico no processo de saturação, vamos considerar a frequência, em intervalos de distâncias percorridas pelo buscador, tanto dos passos truncados (encontro de um alvo) como dos frustrados (passos completos sem achar alvo). Para tal, simulamos buscas aleatórias de 10^4 alvos em ambientes caracterizados por $\ell_0 = 100$, no caso particular de $r_v/\ell_0 = 0.1, 0.2, 0.3$ (ou seja, na vizinhança da transição $\mu_{opt} = 2.0 \rightarrow \mu_{opt} = 3.0$), para as estratégias $\mu = 2.0, 3.0$.

Na Fig.(5.5) mostramos a frequência dos passos (truncados e frustrados) nos diferentes intervalos de grandeza. Em particular, assumimos as variações do comprimento dos passos entre $(0, 10^3]$ $((10^3, 10^4])$ em intervalos de 100 (4000).

Destes resultados concluímos que, conforme aumenta r_v/ℓ_0 , cresce a probabilidade de encontrar um alvo ao considerar tentativas com passos de comprimento menor. Isto faz-se evidente quando inspecionamos em quais situações a frequência de sucessos se torna maior que a frequência de fracassos (Tabela 5.3). Por exemplo, no intervalo de comprimento $(400, 500]$ e um buscador caracterizado por $r_v/\ell_0 = 0.2$ e $\mu = 2.0$, temos que a frequência de sucessos (1649) supera a frequência de fracassos (1208). No entanto, para $r_v/\ell_0 = 0.1$, neste mesmo intervalo, a frequência de sucessos (1633) é menor comparada com a frequência de fracassos (1840). Mas também encontramos que esta vantagem varia conforme a estratégia considerada, ou seja, conforme o valor de μ . Isto é visto ao compararmos em quais intervalos de tamanhos de passos

5 Capacidade de Detecção do Buscador e Estratégia Ótima de Busca

r_v	10	20	30
$\mu = 2.0$	$(500, 600]$	$(400, 500]$	$(300, 400]$
$\mu = 3.0$	$(10^3, 5 \times 10^3]$	$(600, 700]$	$(400, 500]$

Tabela 5.3: Intervalos de grandeza a partir dos quais a frequência dos passos frustrados é menor que a frequência dos passos bem sucedidos.

(para um mesmo r_v/ℓ_0 e diferentes μ 's) a frequência dos passos bem sucedidos se torna maior que a frequência dos passos frustrados (Tabela 5.3). Por exemplo, para $r_v/\ell_0 = 0.2$ encontramos que os passos $\ell_j > 400$ ($\ell_j > 600$) trazem maior vantagem no encontro de um alvo quando $\mu = 2.0$ ($\mu = 3.0$).

É preciso lembrar aqui que $\ell_j^{-\mu}$ decai mais rapidamente para $\mu = 3.0$ do que para $\mu = 2.0$, o que implica um incremento relativo do número de alvos Ω menor para $\mu = 3.0$ quando consideramos acréscimos de r_v (note que mais do 90% dos passos de um buscador com $\mu = 3.0$ se encontram no intervalo $(0, 100]$).

5 Capacidade de Detecção do Buscador e Estratégia Ótima de Busca

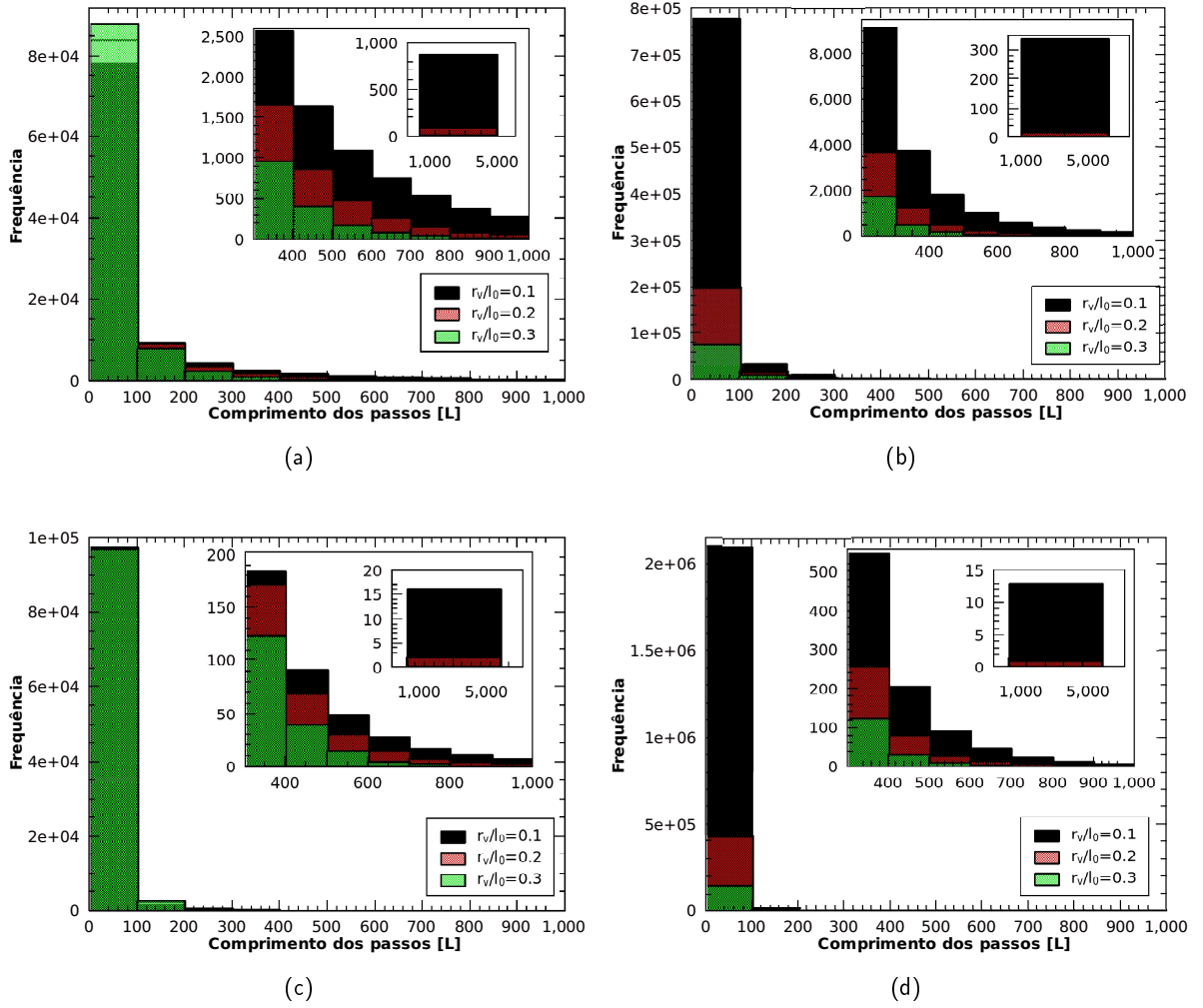


Figura 5.5: Frequência da grandeza dos passos ℓ_j tanto truncados (encontro de um alvo) como frustrados quando $\ell_0 = 100$ e $r_v/\ell_0 = 0.1, 0.2, 0.3$. Em (a) e (b) mostramos a frequência dos passos ℓ_j (truncados e frustrados, respectivamente) de um buscador com $\mu = 2.0$, enquanto que em (c) e (d) mostramos a frequência dos passos ℓ_j (truncados e frustrados, respectivamente) de um buscador com $\mu = 3.0$. Nôte-se que a frequência de passos com grandezas maiores que 5×10^3 é zero para ambas estratégias.

Baseados nas análises anteriores, finalmente podemos discutir como as mudanças na dinâmica da busca, devido as variações de r_v , afetam o crescimento da taxa de voos truncados $\Gamma = \frac{n_{Trun}}{n_T}$ (lembrando que n_{Trun} é o número de voos truncados e n_T é o número de voos total).

5 Capacidade de Detecção do Buscador e Estratégia Ótima de Busca

Na Fig.(5.6) apresentamos um gráfico ilustrativo das variações de r_v . Nele representamos os comprimentos característicos de três buscadores que escolhem seus passos $\ell_j(\mu)$ seguindo estratégias de busca diferentes ($\ell_j(\mu)=\ell_{j\mu=1.1}$, $\ell_{j\mu=2.0}$, $\ell_{j\mu=3.0}$, com $\ell_{j\mu=1.1} > \ell_{j\mu=2.0} > \ell_{j\mu=3.0}$) e que possuem a mesma capacidade de detecção r_v . Conforme é mostrado na Fig.(5.6), para o menor raio de visão, r_{v1} , qualquer que seja a estratégia considerada (levando ao deslocamento $\ell_j(\mu)$) em nenhum caso o buscador consegue encontrar um alvo dentro da área $A_1 = 2r_{v1}\ell_j(\mu)$ (área branca).

Agora supomos acréscimos no raio de visão, caracterizados por $\Delta r_{vi} = r_{vi} - r_{v1}$, ($i = 2, 3, 4$, com $r_{v2} < r_{v3} < r_{v4}$), os quais implicam acréscimos $\Delta A_i = 2\ell_j(\mu)\Delta r_{vi}$ na área de detecção (áreas de diferentes tons de cinza). Para o buscador que segue a estratégia de busca $\mu = 1.1$ ($\ell_{j\mu=1.1}$ no esquema da Fig.(5.6)) mostramos que as variações ΔA_i favorecem notavelmente o encontro de alvos na área de varredura do buscador, embora isto se dá as custas de longos deslocamentos do buscador (por exemplo, note o alvo distante que o buscador irá encontrar no final do passo de tamanho $\ell_{j\mu=1.1}$ se tivermos r_{v2}). O fato de ter deslocamentos longos (característicos para esta estratégia), faz que Ω sempre incremente sem importar a grandeza de ΔA_i . Em consequência, o número total de voos n_T (feitos pelo buscador para encontrar um determinado número de alvos) decai monotonicamente conforme aumenta r_v , o qual explica que $\Gamma_{\mu=1.1}$ não apresente um ponto de inflexão.

Por outro lado, para buscadores com estratégias de busca $\mu = 2.0$ e $\mu = 3.0$, temos que a probabilidade de encontrar um alvo devido ao incremento ΔA_i , depende da magnitude deste. Na representação da Fig.(5.6), temos que Ω cresce devagar conforme aumenta r_v , já que os passos fornecidos por estratégias com μ 's maiores são de menor comprimento ($\ell_{j\mu=1.1} > \ell_{j\mu=2.0} > \ell_{j\mu=3.0}$). Se supomos r_v pequeno e alvos escassos, temos $n_T \gg n_{Trun}$. Porém, se $\ell_{j\mu}$ não é muito pequeno ($\ell_{j\mu=2.0}$), mesmo para Δr_{vi} pequenos há um decaimento importante em n_T (devido ao decréscimo significativo das tentativas frustradas), embora Ω seja

5 Capacidade de Detecção do Buscador e Estratégia Ótima de Busca

pequeno. No entanto, conforme aumenta Δr_{vi} , surge uma natural saturação, pois se com um raio menor, o alvo mais próximo já pode ser detetado, raios maiores de visão já começam a não trazer tantos benefícios em média. Da Fig. (5.6) também fica claro que é justamente a estratégia com os menores passos que sentirá por último eventuais efeitos de saturação (note que é para o maior raio de visão que finalmente a estratégia Browniana conseguirá encontrar o alvo com um passo de tamanho $\ell_{j\mu=3.0}$). Deste modo, temos que os pontos de inflexão β em $\Gamma_{\mu=2.0}$ e $\Gamma_{\mu=3.0}$ estão determinados pelas variações na contribuição das tentativas frustradas em n_T conforme aumenta r_v (e portanto Ω). Tanto maior será β quanto maior for μ .

Portanto, concluímos que para $r_v/\ell_0 < \beta$, se apresenta um crescimento acelerado de Γ ($\frac{\partial^2 \Gamma}{\partial (r_v/\ell_0)^2} > 0$), associado à notável influência das tentativas frustradas sobre n_T . No entanto, depois de atingir este valor β , $\frac{\partial^2 \Gamma}{\partial (r_v/\ell_0)^2} < 0$, como consequência do aumento em Ω , que reduz a contribuição das tentativas frustradas para o valor de n_T .

5 Capacidade de Detecção do Buscador e Estratégia Ótima de Busca

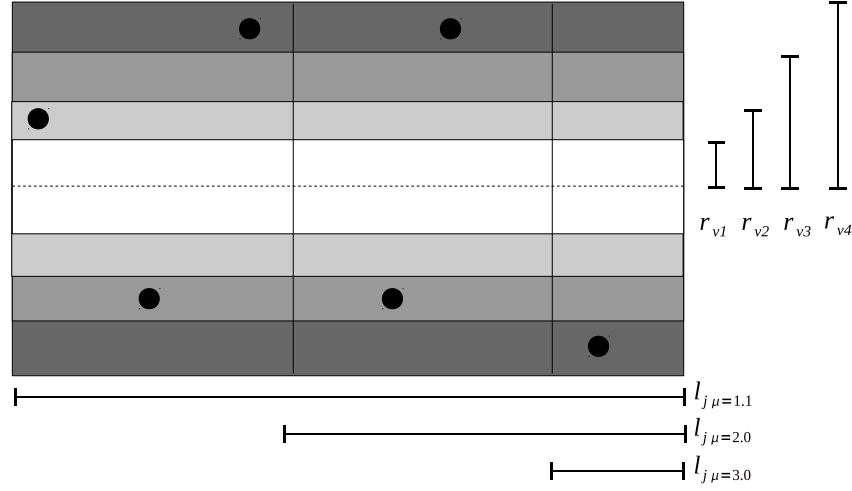


Figura 5.6: Gráfico representativo da variação da capacidade de detecção r_{v1} para buscadores com comprimentos característicos $\ell_j(\mu) = \ell_{j\mu=1.1}$, $\ell_{j\mu=2.0}$, $\ell_{j\mu=3.0}$, com $\ell_{j\mu=1.1} > \ell_{j\mu=2.0} > \ell_{j\mu=3.0}$. Aqui mostramos como aumentos de r_{v1} , caracterizados por $\Delta r_{vi} = r_{vi} - r_{v1}$, ($i = 2, 3, 4$, com $r_{v2} < r_{v3} < r_{v4}$), implicam o encontro de novos alvos devido aos incrementos $\Delta A_i = 2\ell_j(\mu)\Delta r_{vi}$ na área de detecção (áreas cinza).

Como uma última análise das mudanças das estratégias ótimas conforme aumentamos r_v/ℓ_0 , na Fig.(5.7) mostramos o comportamento do comprimento total dos passos frustrados - F - (linhas tracejadas) e os passos truncados - T - (linhas cheias) em função de r_v/ℓ_0 , para $\mu = 1.1, 2.0, 3.0$ nos ambientes de busca já considerados.

Estes gráficos mostram um decaimento monotônico do comprimento total dos passos frustrados F , onde $F_{\mu=1.1} < F_{\mu=2.0} < F_{\mu=3.0}$, para todo o intervalo de r_v/ℓ_0 . O comportamento dos passos truncados T varia segundo o valor de μ . Vemos que a função $T_{\mu=3.0}$ ($T_{\mu=2.0}$) apresenta um rápido crescimento (decaimento) no intervalo onde a estratégia de Lévy $\mu_{opt} \rightarrow 2.0$ se impõe. No entanto, conforme $r_v/\ell_0 \rightarrow 0.2$ (mudança na estratégia ótima $\mu_{opt} = 2.0 \rightarrow \mu_{opt} = 3.0$) o crescimento (decaimento) de $T_{\mu=3.0}$ ($T_{\mu=2.0}$) se torna lento. Por outro lado, a função $T_{\mu=1.1}$ decai sem variações em todo o intervalo de r_v/ℓ_0 . Notamos também que $T_{\mu=1.1} > T_{\mu=2.0} > T_{\mu=3.0}$

5 Capacidade de Detecção do Buscador e Estratégia Ótima de Busca

para todo r_v/ℓ_0 .

Observamos também que no intervalo $[0.7, 1]$, o comprimento total dos voos frustrados se torna decisivo na escolha da estratégia que otimiza a eficiência (quando a busca se realiza em ambientes com alvos mais escassos), já que os valores de T para todas as estratégias são da mesma ordem de grandeza neste caso. Em particular, para os ambientes $\ell_o = 100, 200$, observamos como os valores de T (para todos os μ) são da ordem $\mathcal{O}(10^6)$ e convergem quando $r_v/\ell_0 \rightarrow 1$. Entretanto, neste mesmo intervalo os valores de F diferem. Note que para $r_v/\ell_0 \rightarrow 0.74$, $F_{\mu=1.1}$ é da ordem $\mathcal{O}(10^5)$ enquanto que $F_{\mu=3.0}$ é da ordem $\mathcal{O}(10^6)$. Esta diferença de uma ordem de grandeza entre $F_{\mu=1.1}$ e $F_{\mu=3.0}$ no intervalo $[0.74, 1]$ evidencia o fato que para ambientes com ℓ_0 maiores, o sucesso da busca está determinado pelo comprimento dos passos frustrados F . O grande aumento na eficiência dado por estratégias superdifusivas é devido justamente a que a probabilidade de regressar a um lugar previamente visitado é bem menor (comparado ao caso de difusão normal) evitando assim visitas desnecessárias a lugares já inspecionados.

Já para $\ell_o = 10$ observamos que as funções T não coincidem quando $r_v/\ell_0 \rightarrow 1$. Este é um efeito das frequentes armadilhas que se apresentam em ambientes abundantes de alvos.

5 Capacidade de Detecção do Buscador e Estratégia Ótima de Busca

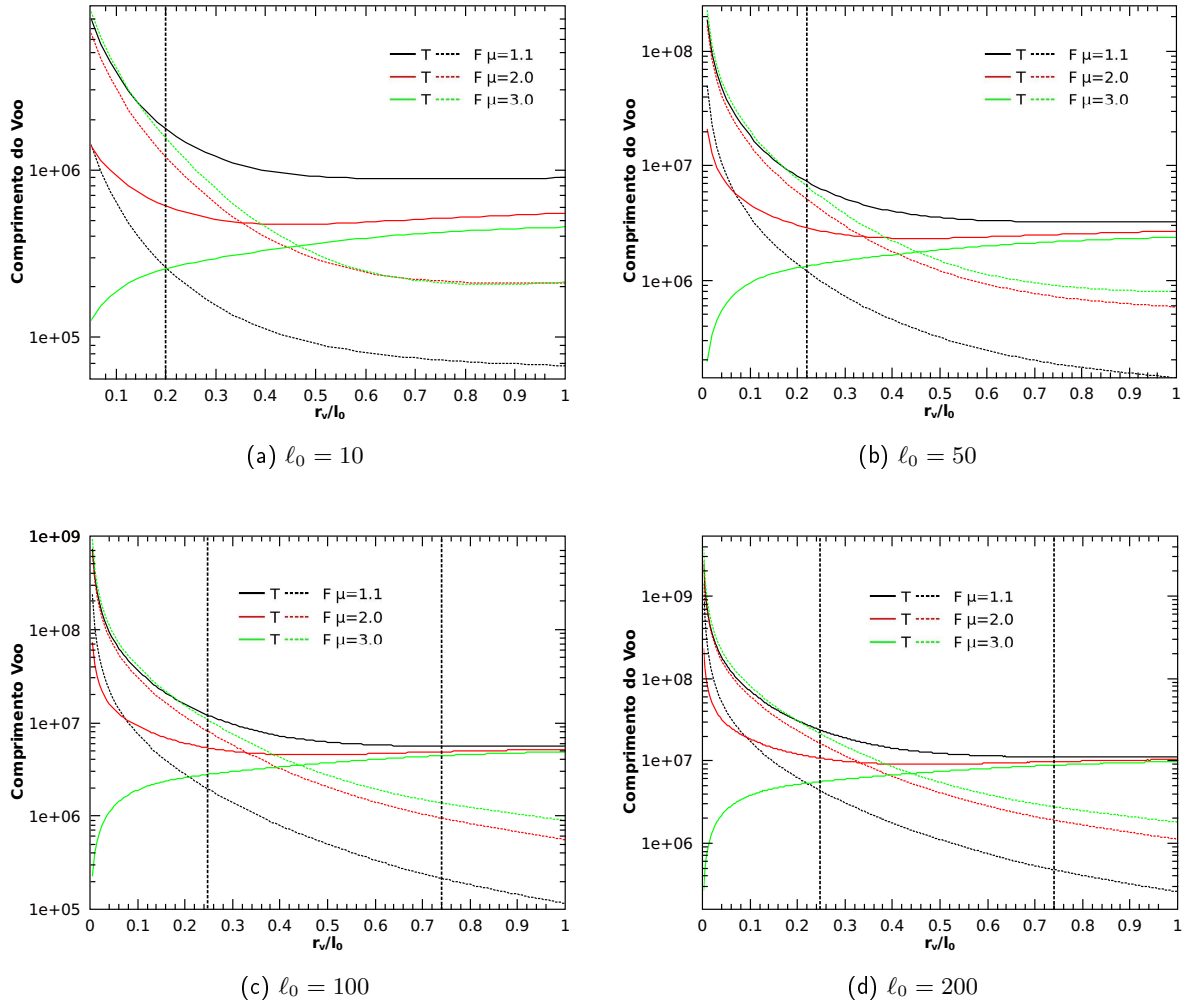


Figura 5.7: Comportamento do comprimento total dos passos frustrados - F - e os passos truncados - T -, conforme aumenta r_v , para $\mu = 1.1, 2.0, 3.0$

Finalmente, na Fig.(5.8) comparamos o efeito das mudanças de l_0 e r_v na eficiência η para as estratégias $\mu = 2.0, 3.0$ (linhas cheias e pontilhadas respectivamente) no intervalo $[0.1, 3.0]$ de r_v/l_0 . As curvas pretas mostram o comportamento de η para um buscador com capacidade de detecção $r_v = 1$ em ambientes com alvos próximos (l_0 varia), enquanto que as curvas vermelhas ($l_0 = 50$) e verdes ($l_0 = 100$) mostram o comportamento η de buscadores com diferentes r_v .

5 Capacidade de Detecção do Buscador e Estratégia Ótima de Busca

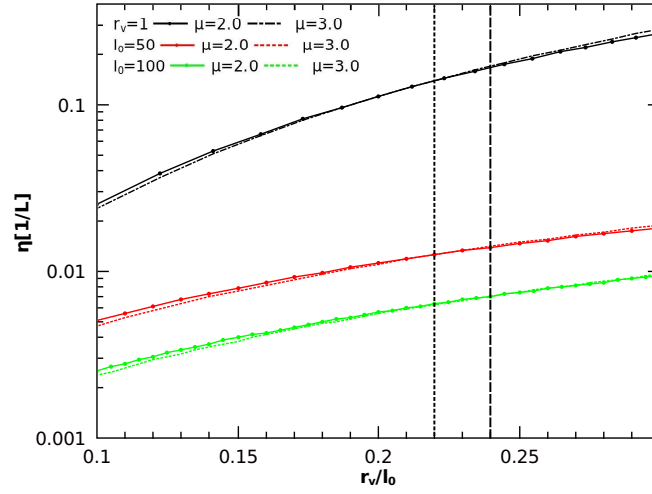


Figura 5.8: Comparação dos efeitos das mudanças de ℓ_0 e r_v na eficiência η . Mostramos η em função de r_v/ℓ_0 para as estratégias $\mu = 2.0, 3.0$ (linha cheia e pontilhada, respectivamente) no intervalo $[0.1, 0.3]$.

As linhas verticais indicam os valores de r_v/ℓ_0 para os quais se apresenta a mudança na estratégia ótima $\mu_{opt} = 2.0 \rightarrow \mu_{opt} = 3.0$. (A linha pontilhada para $\mu_{opt} = 2.0 \rightarrow \mu_{opt} = 3.0$ do buscador com $r_v = 1$ (ℓ_0 varia) e o ambiente com $\ell_0 = 50$ (r_v varia) e a linha tracejada para o ambiente $\ell_0 = 100$ (r_v varia)). A partir deste gráfico vemos que a eficiência é maior quando a busca se realiza em ambientes com alta concentração de alvos (ℓ_0 pequenos) e o buscador tem a capacidade de detecção fixa (r_v pequeno) em comparação com uma busca feita em ambientes com alvos afastados (ℓ_0 grande) e um buscador que possui melhor capacidade de detecção (r_v grande). Tal resultado pode ser de grande interesse para se entender mecanismos de seleção natural, o que é mais “barato” do ponto de vista biológico: ser um animal generalista, e portanto ter baixos valores de ℓ_0 ou ser um animal especialista, portanto ter alto valor de r_v . Fora do escopo do presente trabalho, este seria um excelente tema para um projeto de doutorado.

6 Interação do buscador com o meio ambiente

6.1 O caso do raio de visão dependente do tamanho do passo de busca

É possível que em certos processos de busca, principalmente em contextos biológicos, o buscador tenha seu poder de detecção diminuído dependendo das distâncias que o mesmo viaja para encontrar a presa. Isto pode advir, por exemplo, de dificuldades de enxergar ou cheirar a presa caso o predador esteja a altas velocidades, necessárias quando os passos que deseja dar sejam longos. Um bom exemplo são os pássaros, que para voar grandes distâncias em linha reta necessitam aproveitar térmicas que estão bem acima do nível do chão. Consequentemente, tem uma visão prejudicada ao inspecionar o solo enquanto se deslocam no ar.

Desta forma, para simular tal aspecto em buscas realísticas, aqui iremos considerar um modelo de busca aleatória onde são consideradas mudanças na capacidade de detecção do buscador em função do comprimento dos passos que escolhe. Mais especificamente, iremos discutir a situação em que r_v é função de ℓ_j , assumindo diferentes possibilidades para esta dependência.

6.2 Modelo de Busca

Neste modelo de busca vamos supor que a capacidade de detecção do buscador r_v depende de ℓ_j , $r_v(\ell_j)$, e varia em um intervalo $[r_{min}, r_{max}]$ ($r_{min} < r_{max}$). Relembrando, os passos do buscador estão distribuídos conforme a distribuição truncada de Lévy,

$$T(\ell_j) = \begin{cases} 0, & \ell_j > l_T, \\ \ell_j^{-\mu}, & 0 \leq \ell_j \leq l_T, \\ 0, & \ell_j < r_{max}, \end{cases} \quad (6.1)$$

onde l_T é o comprimento do truncamento. Deste modo, os valores extremos de $r_v(\ell_j)$ estão dados por $r_v(r_{max}) = r_{max}$ e $r_v(l_T) = r_{min}$.

Vamos assumir diferentes possibilidades para as funções $r_v(\ell_j)$ que caracterizaram o decrescimento de r_v conforme aumenta o comprimento do passo ℓ_j . Estas funções $r_v(\ell_j)$ não estão fundamentadas em resultados empíricos. No entanto, a escolha destas funções foi motivada pelo nosso interesse em estudar as mudanças da taxa de encontros conforme seja o decrescimento de $r_v(\ell_j)$.

Desta forma, definindo $\Delta r_v = (r_{max} - r_{min})$ (Fig.(6.1)), iremos considerar os seguintes comportamentos para $r_v(\ell_j)$:

- Função de Heaviside

$$r_v(\ell_j) = \begin{cases} \ell_j < l_T/2, & r_v = r_{max}, \\ \ell_j \geq l_T/2, & r_v = r_{min}. \end{cases} \quad (6.2)$$

6 Interação do buscador com o meio ambiente

- Função linear

$$r_v(\ell_j) = \alpha \ell_j + \beta, \quad (6.3)$$

$$\alpha = -\frac{\Delta r_v}{l_T},$$

$$\beta = r_{max} + r_{min} - \alpha(r_{min} + l_T).$$

- Função exponencial

$$r_v(\ell_j) = \alpha \exp[\beta \ell_j] + \delta, \quad \beta < 0, \quad (6.4)$$

$$\alpha = \frac{\Delta r_v}{\exp[\beta r_{min}] - \exp[\beta l_T]},$$

$$2\delta = r_{max} + r_{min} - \alpha(\exp[\beta r_{min}] + \exp[\beta l_T]).$$

Aqui iremos usar $\beta = -0.01, -0.001$.

- Função de lei potência

$$r_v(\ell_j) = \alpha \ell_j^\beta + \delta, \quad \beta < 0, \quad (6.5)$$

$$\alpha = \frac{\Delta r_v}{r_{min}^\beta - l_T^\beta},$$

$$2\delta = r_{max} + r_{min} - \alpha(r_{min}^\beta + l_T^\beta).$$

Já neste caso usaremos $\beta = -0.1, -1.0, -2, 0, -3.0$.

As regras dinâmicas de comportamento para um buscador com capacidade de detecção r_v variável (que depende do passo) são assumidas serem as seguintes:

1. O buscador inicia a busca com sua capacidade de detecção máxima. Se há um alvo

6 Interação do buscador com o meio ambiente

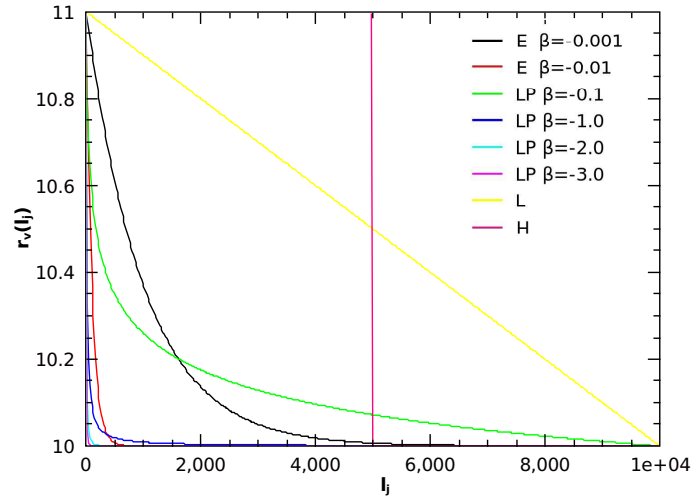


Figura 6.1: Capacidade de detecção r_v em função do comprimento do passo ℓ_i . Decrescimento da capacidade de detecção conforme aumenta o comprimento dos passos. Para o caso $r_{min} = 10$ e $r_{max} = 11$.

- localizado dentro do raio de “visão direta”, $r_v = r_{max}$, então o buscador caminha em linha reta até o mesmo.
2. Se não há nenhum alvo dentro do raio de visão, então o buscador escolhe uma direção aleatoriamente e uma distância ℓ_j da probabilidade de distribuição (6.1). O buscador então “adquire” uma capacidade de detecção conforme ℓ_j , ou seja, um $r_v(\ell_j)$ de acordo com uma das funções acima descritas. Então, ele se move gradualmente para o novo ponto, procurando constantemente um novo alvo dentro de seu raio de visão $r_v = r_v(\ell_j)$ ao longo do caminho. Se o buscador não detecta um alvo, ele para após percorrer a distância ℓ_j e escolhe uma nova direção e uma nova distância ℓ_{j+1} e assim, readapta sua capacidade de detecção conforme $r_v = r_v(\ell_{j+1})$. Caso contrário, ele segue até o alvo segundo 1.
 3. Se o buscador visita consecutivamente os mesmos dois alvos por mais de ε vezes, ele escolhe uma nova direção e uma nova distância ℓ_k e então segue a regra 2 descrita

anteriormente.

6.3 Influência da Capacidade de Detecção Dependente do Tamanho do Passo Sobre a Eficiência de Busca

Baseados neste modelo, simulamos 1000 buscas aleatórias para um buscador com capacidade de detecção $r_v(\ell_j)$ em um ambiente de busca caracterizado por $\ell_0 = 100$, onde foram consideradas as diferentes funções que descrevem a dependência de r_v com o tamanho do passo ℓ_j .

Em primeiro lugar vamos considerar a dinâmica de um buscador caracterizado por $\Delta r_v = 1$. Na Fig.(6.2) mostramos a eficiência (adimensional) $\ell_0 \eta$ em função da estratégia μ , para os casos $r_{max} = 2$ (Fig.(6.2a)), $r_{max} = 11$ (Fig.(6.2b)) e $r_{max} = 21$ (Fig.(6.2c)).

Da análise destes resultados, podemos concluir que mesmo neste caso em que Δr_v não é tão grande, o decrescimento de $r_v(\ell_j)$ tem efeitos consideráveis no comportamento da eficiência da busca η e das estratégias dinâmicas que levam a sua otimização.

Um ponto a ser notado é que quanto mais rápido for o decaimento de r_v em função do tamanho dos passos ℓ_j , maior será a mudança em η , um resultado bastante intuitivo. Também vemos que a estratégia ótima de busca μ_{opt} além de depender do decrescimento $r_v(\ell_j)$, também depende dos valores de r_{max} e r_{min} escolhidos.

Para melhor comparar as diferenças na eficiência de um buscador com r_v constante e outro com $r_v(\ell_j)$, na Fig.(6.2) temos que as curvas vermelhas representam a eficiência quando a busca é feita com $r_v = r_{min}$ e $r_v = r_{max}$ (curvas cheia e tracejada, respectivamente). Note que nos casos analisados a curva da eficiência atinge seu máximo em $\mu_{opt} \rightarrow 2.0$ (na verdade, para $r_v = 1$ temos que $\mu_{opt} = 1.9$). Para o caso $r_v = r_{min}$ constante, o truncamento (*cutoff*) inferior da distribuição de Lévy considerado na busca é de r_{max} . Isto implica que o comprimento do passo mínimo que o buscador pode dar é r_{max} . Este valor é usado para facilitar as comparações e

6 Interação do buscador com o meio ambiente

padronizar as simulações.

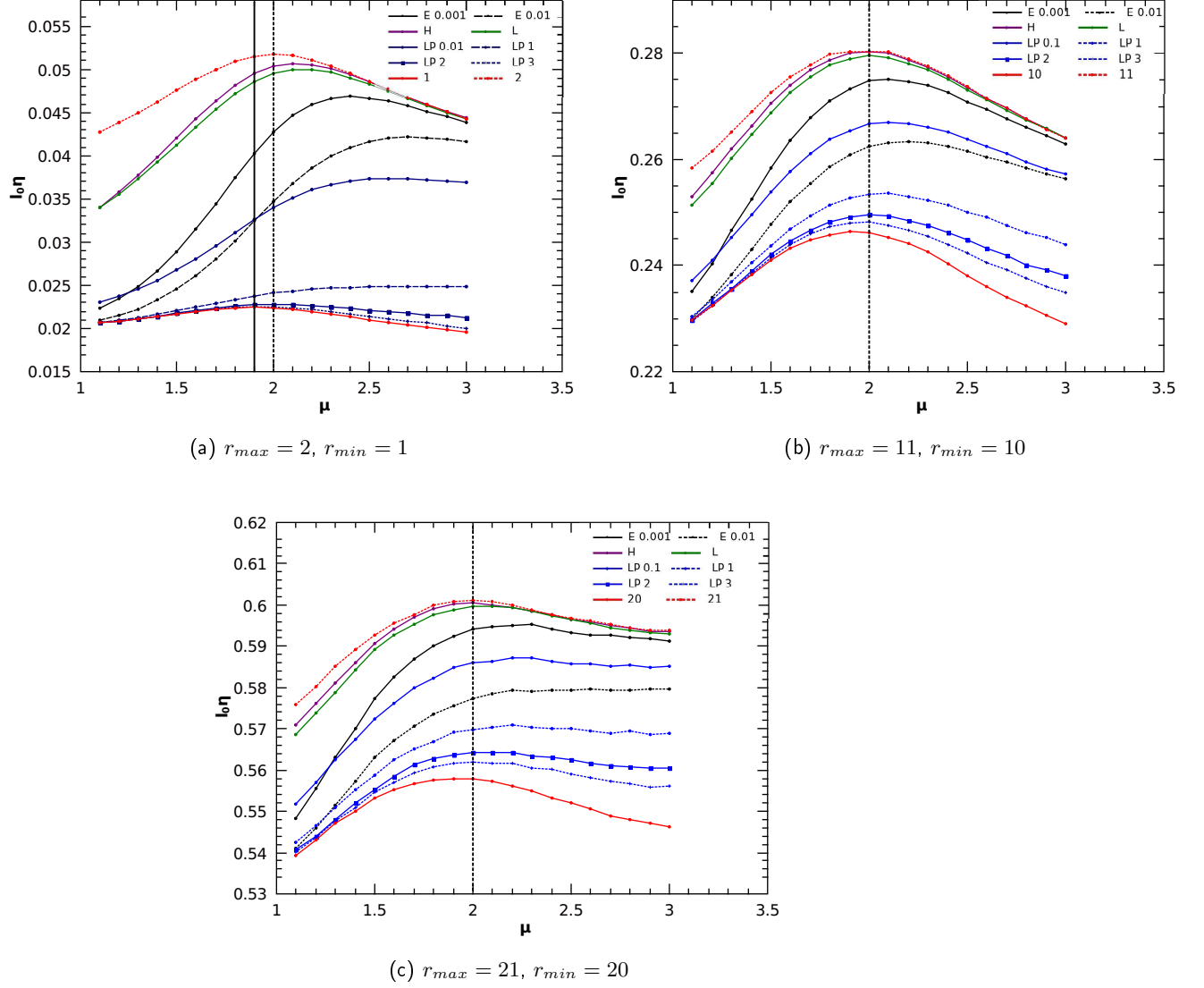


Figura 6.2: Comportamento da eficiência quando o buscador apresenta mudanças na capacidade de detecção conforme o comprimento do passo escolhido. Mostramos $\ell_0 \eta$ vs μ para buscadores com $r_v = r_v(\ell_j)$ para o intervalo $\Delta r_v = 1$. caracterizamos o decrescimo de $r_v = r_v(\ell_j)$ a partir de funções de heaviside (roxa), linear (verde), exponencial (preta: $\beta = -0.001$ (cheia) e $\beta = -0.001$ (tracedjada)) e lei de potências (azul : $\beta = -0.1$ (cheia-círculos), $\beta = -1$ (tracedjada-círculos), $\beta = -2$ (cheia-quadrados), $\beta = -3$ (tracedjada-cruzes)).

6 Interação do buscador com o meio ambiente

r_{max}	$\mu_{opt H}$	$\mu_{opt L}$	$\mu_{opt E(-0.001)}$	$\mu_{opt E(-0.01)}$	$\mu_{opt LP(-0.1)}$	$\mu_{opt LP(-1)}$	$\mu_{opt LP(-2)}$	$\mu_{opt LP(-3)}$
2.0	2.1	2.1	2.4	2.7	2.6	2.6	2	1.9
11	2.0	2.0	2.1	2.2	2.1	2.1	2.0	2.0
21	2.0	2.1	2.2	(2.2,3.0)	2.2	2.2	2.1	2.1

Tabela 6.1: Estratégias ótimas de busca quando $r_v(\ell_j)$ varia em um intervalo $\Delta r_v = 1$.

Em particular, para variações de $r_v(\ell_j)$ no intervalo $[2, 1]$ (Fig.(6.2a)), encontramos que as estratégias no intervalo $1.9 \leq \mu_{opt} \leq 2.1$ aumentam a taxa de encontros quando $r_v(\ell_j)$ decresce rapidamente no intervalo de ℓ_j menores, justamente para funções $r_v(\ell_j)$ tipo leis de potências com $\beta = -2, -3$. No entanto, a eficiência de busca cresce para μ 's maiores se o decaimento de $r_v(\ell_j)$ é lento neste intervalo de ℓ_j . Isto pode ser visto no comportamento de $\ell_0 \eta(\mu)$ quando o decaimento de $r_v(\ell_j)$ é exponencial (Tabela (6.1)).

Quando consideramos as variações de $r_v(\ell_j)$ no intervalo $[10, 11]$ (Fig.(6.2b)) vemos que as estratégias de caráter superdifusivo dadas por $2.0 \leq \mu_{opt} \leq 2.2$ aumentam fortemente a taxa de encontros (Tabela (6.1)). Este deslocamento à direita de $\mu = 2.0$ é provocado pela vantagem que traz dar passos de comprimentos não tão grandes (uma vez que passos menores tem raio de visão maior). A mudança mais acentuada na estratégia ótima de busca se dá quando $r_v(\ell_j)$ decresce segundo a função exponencial $\beta = -0.01$, (temos que $\mu_{opt} \rightarrow 2.2$). Este caso corresponde justamente ao decréscimo mais acentuado de r_v em função de ℓ_j .

Por outro lado, quando as mudanças de $r_v(\ell_j)$ acontecem dentro do intervalo $[20, 21]$ (Fig.(6.2c)), observamos que a eficiência não muda significativamente para estratégias com $\mu \geq 2.0$. Este comportamento pode ser entendido se relembrarmos nossos resultados anteriores onde encontramos a transição $\mu_{opt} = 2.0 \rightarrow \mu_{opt} = 3.0$ quando $r_v/\ell_0 \rightarrow 0.24$ (r_v constante e $\ell_0 = 100$). Aqui temos r_v grande o suficiente para não haver variações sensíveis da eficiência quando o mesmo varia de 21 para 20. Entretanto, é relevante notar que a única função $r_v(\ell_j)$ que não traz mudança alguma na estratégia ótima é a função de Heaviside ($\mu_{opt} \rightarrow 2$) (Tabela (6.1)) .

Ao comparar os resultados da Tabela (6.1), vemos que o comportamento de η varia fortemente

6 Interação do buscador com o meio ambiente

quando o decaimento de $r_v(\ell_j)$ se dá no intervalo $[2, 1]$. Isto pode ser facilmente entendido se levamos em conta que o número de tentativas frustradas aumenta conforme a diminuição de r_v/ℓ_0 . Este aumento de tentativas frustradas implicam em um maior número de readaptações de $r_v(\ell_j)$ e portanto, numa maior dependência desta com o caracter difusivo do buscador.

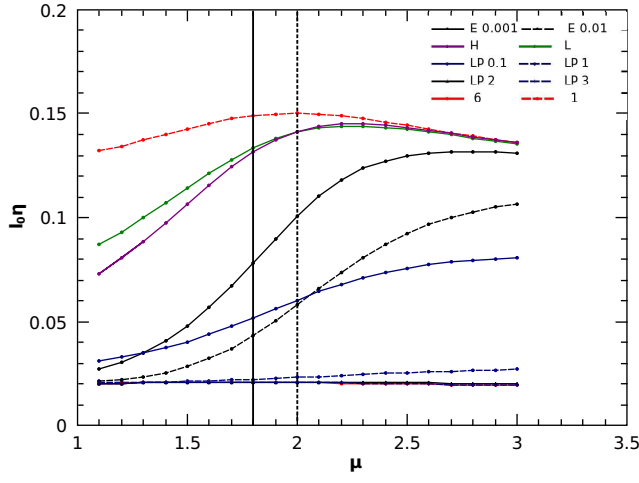
Na sequência vamos considerar as variações de $r_v(\ell_j)$ em um intervalo $\Delta r_v = 5$. Na Fig(6.3) apresentamos a eficiência (adimensional) $\ell_0\eta$ em função da estratégia μ para os casos $r_{max} = 6$ (Fig.(6.3a)), $r_{max} = 15$ (Fig.(6.3b)) e $r_{max} = 25$ (Fig.(6.3c)). Novamente as curvas vermelhas mostram $\ell_0\eta$ quando se considera um buscador com r_v constante, $r_v = r_{min}$ e $r_v = r_{max}$ (as linhas pretas verticais mostram μ_{opt} obtidos para $r_v = r_{min}$ (cheia) e $r_v = r_{max}$ (pontilhada)). Aqui salientamos o caso $r_v = r_{min}$ (para o truncamento inferior da distribuição de Lévy sendo igual a r_{max}), o qual se caracteriza por ter $\eta_{\mu=1.1} > \eta_{\mu=3.0}$, levando a um comportamento distinto do caso $r_v = r_{max}$ onde $\eta_{\mu=1.1} < \eta_{\mu=3.0}$.

Estes gráficos mostram que conforme aumentamos o valor de Δr_v , a estratégia Browniana tende a maximizar a taxa de encontros para quase todas as situações analisadas aqui (Tabela (6.2)). Isto se dá pois menores deslocamentos levam a maiores raios de visão. No entanto, quando r_v apresenta um rápido decaimento para r_{min} no intervalo de pequenos ℓ_j (função de lei de potências $\beta = -2, -3$), ou quando os passos de comprimento não muito maiores adquirem uma vantagem significativa (função Heaviside e linear), vemos que a estratégia de Lévy $\mu \rightarrow 2$ otimiza a taxa de encontros.

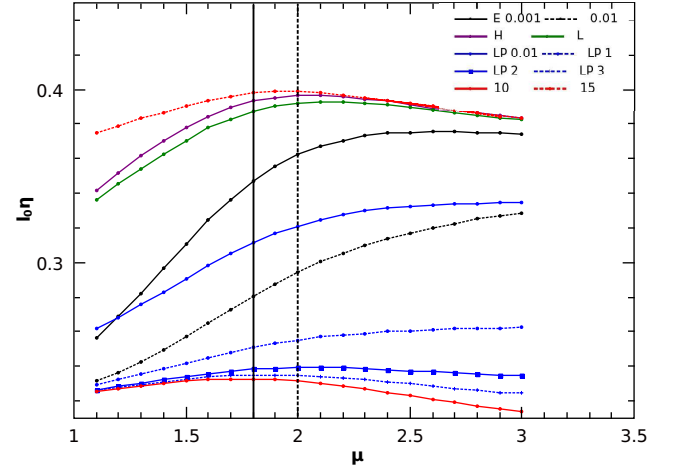
r_{max}	$\mu_{opt H}$	$\mu_{opt L}$	$\mu_{opt E(-0.001)}$	$\mu_{opt E(-0.01)}$	$\mu_{opt LP(-0.1)}$	$\mu_{opt LP(-1)}$	$\mu_{opt LP(-2)}$	$\mu_{opt LP(-3)}$
6	2.2	2.2	3	3	3	3	1.9	1.8
15	2	2	3	3	3	3	2.1	1.9
25	3	3	3	3	3	3	3	2

Tabela 6.2: Estratégias ótimas de busca quando $r_v(\ell_j)$ varia em um intervalo $\Delta r_v = 5$.

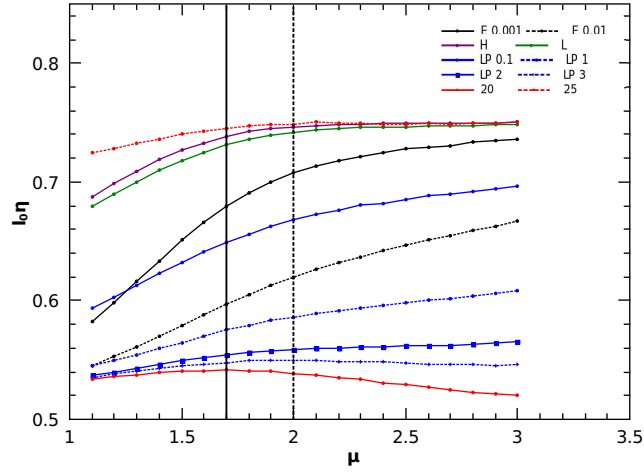
6 Interação do buscador com o meio ambiente



(a) $r_{max} = 6, r_{min} = 1$



(b) $r_{max} = 15, r_{min} = 10$



(c) $r_{max} = 25, r_{min} = 20$

Figura 6.3: Comportamento da eficiência quando o buscador apresenta mudanças na capacidade de detecção conforme o comprimento do passo escolhido. Mostramos $\log \eta$ vs μ para buscadores com $r_v = r_v(\ell_j)$ para o intervalo $\Delta r_v = 5$. caracterizamos o decrescimento de $r_v = r_v(\ell_j)$ a partir de funções de heaviside (roxa), linear (verde), exponencial (preta: $\beta = -0.001$ (cheia) e $\beta = -0.001$ (tracejada)) e lei de potências (azul : $\beta = -0.1$ (cheia-círculos), $\beta = -1$ (tracejada-círculos), $\beta = -2$ (cheia-quadrados), $\beta = -3$ (tracejada-cruzes)).

7 Conclusões e Perspectivas

O problema de busca aleatória e sua otimização é extremamente complexo e rico. Apresenta um cem número de fatores que torna o problema de significativo interesse em Física e em outras áreas, como Biologia. Esta grande gama de aspectos relevantes tornam a solução da maximização da eficiência extremamente dependente de particularidades da dinâmica de busca e das condições do ambiente em que a busca ocorre. Desta forma, a proposta desta dissertação foi estudar um ponto muito importante no problema, mas ainda pouco explorado na literatura que são os efeitos de variação de densidade de alvos, $\rho(\ell_0)$, e a influência da capacidade de detecção do buscador, r_v . Nosso objetivo é determinar, através de modelos bem simples, como tais quantidades afetam a dinâmica do buscador que leva à otimização da taxa de encontros.

Considerando o modelo de busca aleatória de Lévy (de alvos revisitáveis) em ambientes $2D$, estudamos como a distância característica entre os alvos, ℓ_0 , que define a distribuição dos mesmos no ambiente, influencia o valor de eficiência de busca. Isto foi feito assumindo-se diferentes valores para o poder de detecção do buscador, dado pelo raio de visão fixo r_v . Os resultados obtidos para estas situações nos levam a concluir que podemos caracterizar o regime ótimo de Lévy $\mu_{opt} \rightarrow 2$ a partir dos valores de r_v/ℓ_0 . Encontramos que para $r_v/\ell_0 < 0.2$ a estratégia de Lévy $\mu_{opt} \rightarrow 2$ maximiza a taxa de encontros. Entretanto, para $r_v/\ell_0 \rightarrow 0.2$ se apresenta uma mudança na estratégia ótima, $\mu_{opt} = 2.0 \rightarrow \mu_{opt} = 3.0$. Isto pode ser entendido qualitativamente uma vez que maior densidade (ou maior poder de detecção) faz com que não seja necessário passos muito longos para encontrar um alvo e portanto o movimento Browniano

7 Conclusões e Perspectivas

começa a ser uma boa escolha para o movimento. Também encontramos que para ambientes com alvos escassos, a estratégia superdifusiva $\mu_{opt} = 1.1$ favorece a taxa de encontros quando $r_v/\ell_0 \rightarrow 0.74$. Aqui temos a situação oposta, poucos alvos exigem maiores deslocamentos, logo um comportamento perto do balístico leva à otimização do processo.

Para entender melhor esta transição entre estratégias ótimas, estudamos uma quantidade “dinâmica” de interesse, a razão entre o número de voos bem sucedidos (encontro de um alvo) e o número total de voos da busca, uma grandeza que denotamos por Γ . Ao analisar tais curvas, notamos pontos de inflexão, localizados em β (ao longo do eixo x, represenando a grandeza r_v/ℓ_0). Estudando as curvas $\Gamma_{\mu=2.0}$ e $\Gamma_{\mu=3.0}$, vimos que o ganho na eficiência devido as variações de r_v apresenta uma desaceleração conforme aumenta r_v/ℓ_0 . Também, ao determinar que $\beta_{\mu=2.0} < \beta_{\mu=3.0}$, verificamos que o efeito da variação de r_v depende fortemente das distribuições de passos ℓ_j . E chegamos a conclusão que uma variação no raio de visão é mais importante para μ maiores.

Na sequência, motivados pela situação concreta onde há uma explícita interação entre o buscador e o ambiente de busca, onde por exemplo, o poder de detecção depende das condições que o buscador encontra no ambiente para maiores ou menores distâncias, propusemos um modelo em que r_v depende de ℓ_j . Considerando a situação realística de que r_v diminui com o aumento de ℓ_j em um intervalo definido por $[r_{min}, r_{max}]$, estudamos o comportamento da eficiência e a estratégia ótima conforme o decrescimento do raio de visão com os passos, portanto conectando indiretamente r_v com μ . Assumimos diferentes funções $r_v(\ell_j)$, apresentando diferentes taxas de decaimento. Também consideramos diferentes valores para o raio máximo e mínimo do buscador. Desta análise concluímos que as variações na capacidade de detecção trazem significativas mudanças nos valores da eficiência, isto estando fortemente correlacionado com o intervalo de variação de r_v . De forma resumida, fortes decaimentos da função $r_v(\ell_j)$ ou grandes valores de Δr_v fazem com que μ 's entre 2 e 3 sejam boas estratégias de busca.

7 Conclusões e Perspectivas

Temos a esperança que estes novos resultados encontrados possam motivar ainda mais o estudo de busca aleatória de forma geral, e o de forrageo animal de forma particular. Nosso objetivo aqui não foi fazer uma comparação direta de nossos modelos com situações experimentais. Entretanto, acreditamos que muitos resultados aqui propostos poderiam ser usados para estudar dados de busca e assim tentar determinar como a densidade e o poder de detecção influenciam dinâmicas de busca na natureza. Isto seria uma ótima continuação para o presente trabalho e eventualmente seria uma proposta promissora para um projeto de doutorado.

Na verdade, com relação a possíveis continuações para esta dissertação, podemos citar algumas possibilidades:

- Os presentes modelos são estatísticos, gastos energéticos não foram considerados. Obviamente que a busca, por exemplo, encontros biológicos, requerem consumo energético para a manutenção do processo. Incluir gasto energético e como a variação de densidade e raio de visão poderiam “poupar” energia do buscador é um tópico de grande interesse.
- O que muda no processo se considerarmos o caso $1D$ e o caso $3D$. Resultados gerais mostram que qualitativamente estratégias de busca não podem mudar em diferentes dimensões. Mas tais resultados não levam em conta $r_v(\ell_j)$. A robustez de estratégias ótimas com relação à dimensão espacial ainda é válida neste caso? Este seria um excelente ponto a ser investigado.
- Finalmente, temos que um ambiente pode ter ℓ_0 variando de acordo com a localidade espacial (ambientes heterogêneos). Além disso, o próprio poder de detecção pode variar de acordo com a localidade. Por exemplo, se temos um animal terrestre que se baseia na visão para achar seus alvos, ele terá um poder de detecção muito maior em um ambiente aberto (campo) do que em um ambiente fechado (num bosque cheio de árvores). Estudar ℓ_0 e r_v variando dentro do ambiente de busca e então tentar encontrar estratégias adaptativas

7 Conclusões e Perspectivas

que otimizem o processo, certamente é um desafio importante dentro do tema de busca aleatória.

Referências Bibliográficas

- [ARM+02] Atkinson R.P.D., Rhodes C.J., Macdonald D.W., Anderson R.M., *Oikos* 98, 134 (2002).
- [Bar09] Bartumeus F., *Oikos* 118, 488 (2009).
- [BaC09] Bartumeus F., Catalan J., *J. Phys. A: Math. Theor.* 42, 434002 (2009).
- [BBA+03] Bardou F., Bouchaud J., Aspect A., Cohen-Tannoudji C., *Lévy Statistics and Laser Cooling: How Rare Events Bring Atoms to Rest*, Cambridge (2003).
- [BCF+02] Bartumeus F., Catalan J., Fulco U. L., Lyra M. L., Viswanathan G. M., *Phys. Rev. Lett.* 88, 097901 (2002).
- [BHK+01] Buldyrev S. V., Havlin S., Kazakov A. Ya., da Luz M. G. E., Raposo E. P., Stanley H. E., Viswanathan G. M., *Phys. Rev. E* 64, 041108 (2001).
- [BLM+06] Bénichou O., Loverdo C., Moreau M., Voituriez R., *Phys. Rev. E* 74, 020102 (2006).
- [BMR+04] Boyer D. , Miramontes O. , Ramos-Fernández G. , Mateos J.L. , Cochoa G., *Physica A* 342, 329 (2004).
- [BPP+03] Bartumeus F., Peters F., Pueyo S., Marrase C., Catalan J., *Proc. Natl. Acad. Sci.* 100, 12771 (2003).

Referências Bibliográficas

- [CHP+04] Codling E. A., Hill N. A., Pitchford J. W., Simpson S. D., Mar. Ecol. Prog. Ser. 279, 215 (2004).
- [CPB08] Codling E. A., Plank M. J., Benhamou S., J. R. Soc. Interface 5, 813 (2008).
- [EPW+07] Edwards A.M., Phillips R.A., Watkins N.W., Freeman M.P., Murphy E.J., Afanasyev V., et al., Nature 449, 1044 (2007).
- [Fel68] Feller W., *An Introduction to Probability Theory and its Applications, Vol I-II*, 2 Ed., (1968).
- [HQD+10] Humphries N.E., Queiroz N., Dyer J. R. M., Pade N. G., Musyl M. K., Schaefer K. M., et al., Nature 465, 1066 (2010).
- [Lev37] P. Lévy, *Theorie de l'Addition des Variables Aleatoires*, Paris (1937).
- [Lew99] Lewis R., *Complexity: Life at the edge of Chaos*, Chicago (1999).
- [LGR+09] da Luz M. G. E., Grosberg A., Raposo E. P., Viswanathan G. M., Phys. A: Math. Theor. 42, 43 (Special Issue). The Random Search Problem: Trends and Perspectives (2009).
- [LKW88] Levandowsky M., Klafter J., White B.S., Bull. Marine Sci. 43, 758 (1988).
- [MaS94] Mantegna R. N. and Stanley H. E., Phys. Rev. Lett. 73, 2946 (1994) .
- [NGR+08] Nathan R., Getz W.M., Revilla E., Holyoak M., Kadmon R., Saltz, D., Smouse, P.E. Proc. Natl. Acad. Sci. USA, 105, 19052 (2008).
- [PCa95] Pirolli P., Card S., *Proc. Conf. Human Factors in Computing Systems*, New York. p. 51(1995).
- [Pri77] Prigogine I., Nobel Lecture: Time, Structure and Fluctuations, (1977).

Referências Bibliográficas

- [Rey09] Reynolds A. M., Physica A 388, 561 (2009).
- [ReF07] Reynolds A.M., Frye M.A., PLoS One 4, e354 (2007).
- [RyB05] Rycroft C. H., Bazant M. Z., Lecture I: Introduction to Random Walks and Diffusion. Department of Mathematics, MIT (2005).
- [RBM+09] Raposo E. P., Buldyrev S. V., da Luz M. G. E., Viswanathan G. M., Stanley H. E., J. Phys. A: Math. Theor. 42, 430301 (2009).
- [RSM+07] Reynolds A.M., Smith A.D., Menzel R., Greggers U., Reynolds D.R., Riley J.R., Ecology 88, 1955 (2007).
- [RSR+07] Reynolds A.M., Smith A.D., Reynolds D.R., Carreck N.L., Osborne J.L., J. Exper. Biol. 210, 3763 (2007).
- [SBM+07] Santos M. C., Boyer D., Miramontes O., Viswanathan G. M., Raposo E. P., Mateos J. L., da Luz M. G. E., Phys. Rev. E 75, 061114 (2007).
- [SFW10] Smee D. L., Ferner M. C., Weissburg M. J., Ecology 91, 1391(2010).
- [SZK93] Shlesinger M. F., Zaslavsky G. M., Klafter J., Nature 363, 31 (1993).
- [VBH+99] Viswanathan G. M., Buldyrev S. V., Havlin S., da Luz M. G. E., Raposo E. P., Stanley H. E., Nature 401, 911 (1999).
- [VRL08] Viswanathan G.M. , Raposo E.P. , da Luz M.G.E., Phys. Life Rev. 5, 133 (2008).